KIRGIZİSTAN TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EĞRİ ÜZERE AĞIRLIKLI ORTONORMAL POLİNOMLARIN DAVRANIŞLARI

Hazırlayan

Zaripa TAŞBAEVA

Danışman
Prof.Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

KIRGIZİSTAN/BİŞKKEK

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Zaripa Taşbaeva
İmza :

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Мен бул эмгекте алынган баардык маалыматтарды академиялык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум.Тагыраак айтканда, бул эмгекте колдонулган, бирок мага тиешелүү болгон маалыматтардын баардыгын тиркемеде так көрсөттум жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

Аты – жөнү : Зарипа Ташбаева

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Eğri Üzere Ağırlıklı Ortonormal Polinomların Davranışları” adlı Yüksek Lisans Tezi,Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi hazırlayan:	Danışman:
Zaripa TAŞBAEVA	Prof.Dr. Fahreddin ABDULLAYEV
İmza:	İmza:

Matematik ABD Başkanı

Prof.Dr. Anarkül URDALETOVA

İmza:

KABUL VE ONAY

Prof.Dr. Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında Zaripa TAŞBAEVA tarafından hazırlanan "Eğri Üzere Ağırlıklı Ortonormal Polinomların Davranışları" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

......./…./……

JÜRİ:

Danışman	: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Komisyon Başkanı	: Prof. Dr. Asan BAYZAKOV	....
Üye	: Prof. Dr. Avıt ASANOV	……………
Üye	: Prof.Dr. Anarkül URDALETOVA	....
Üye	: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİYEV	....
Üye	: Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ………... tarih ve …………..…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....../……./…..

Doç.Dr. Dagistan ŞİMŞEK

Enstitü Müdürü

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ

Ф-м. и. док., профессор Абдуллайев Фахреддин жетекчилигинде Ташбаева Зарипа тарабынан даярдалган “Ийри сызык боюнча ортонормалдуу полиномдордун кыймылы” аттуу темада магистрдык иш комиссия тарабынан Кыргыз-Түрк Манас Университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдык иш болуп кабыл алынды.

......../…../……

Комиссия :

Илимий Жетекчиси	: ф-м. и. докт., профессор Абдуллайев Фахреддин	....
Төрагасы	: ф-м. и. докт., профессор Байзаков Асан	....
Мүчө	: ф-м. и. докт., профессор Асанов Авыт	…….........
Мүчө	: ф-м. и. докт., профессор Урдалетова Анаргүль	....
Мүчө	: ф-м. и. докт., профессор Өмүралиев Асан	....
Мүчө	: Доц. Др. Дагыстан Шимшек	....

ЧЕЧИМ :

Бул магистрдик ишти кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин ………..
датасында жана …………..…… санындагы чечими менен бекитилди.

......../……./…....

Доц. Др. Дагыстан Шимшек.

Институт мүдүрү

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bu günlere gelmemde en büyük katkı sahibi sayın hocam Prof.Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca; çalışmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Zaripa TAŞBAEVA

BİŞKEK, 2018

EĞRİ ÜZERE AĞIRLIKLI ORTONORMAL POLİNOMLARIN DAVRANIŞLARI

Zaripa TAŞBAEVA

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2018

Danışman: Prof.Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

ÖZET

Bu çalışmada:

Kompleks düzlemde yerleşen belli bir kapalı eğri boyunca verilmiş ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan kompleks değişkenli polinomların davranışları incelendi. Verilmiş kapalı eğrinin geometrik veya fonksiyonel özelliklerinin ve ağırlık fonksiyonunun etkisinin bu değerlendirmelerde nasıl etkili olduğunun tespiti.

Fizik ve matematiğin bir çok alanlarında kapalı eğri boyunca ortonormal polinomların çeşitli uygulamalı bilinmektedir. Buna bağlı olarak ortonormal polinomlar incelendi

Bu polinomlar yalnız eğri üzerinde verilmiş ağırlık fonksiyonuna göre ortonormallık koşuluyla tanımlandıklarından, onların davranışları gerek eğrinin, gerekse de ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak değişecektir. Esasında aşağıda iki problem incelendi:

i. Kuvvet fonksiyonu şeklinde tanımlanmış ağırlık fonksiyonu ile eğrini tanımlayan parametreler arasında bir fonksiyonel denge sağlandığı zaman bu polinomların davranışları incelendi.

ii. Belirtilen denge bozulduğu zaman bu polinomların davranışları incelendi.

Anahtar Kelimeler: Polinom, Ortonormal polinom, Konform Dönüşüm, Yarı Konform dönüşüm, Yarı konform Eğri, Düzgün Eğri

ИЙРИ СЫЗЫК БОЮНЧА ОРТОНОРМАЛДУУ ПОЛИНОМДОРДУН КЫЙМЫЛЫ

Зарипа Ташбаева
Кыргыз-Түрк “Манас” университети, Табигий илимдер институту
Магистрдик иш, Июнь 2018
Илимий жетекчи: Ф.м. и. докт.,профессор Фахреддин Абдуллайев

Кеңири аннотация

Бул диссертацияда :

Комплекс мейкиндикте белгилүү туюк ийри сызык боюнча берилген салмактуу функцияга карата ортонормалдуу болгон комплекс өзгөрмөлүү полиномдордун кыймылын изилдедик. Берилген ийри туюк сызыктын геометриялык же функциялдык касиеттеринин жана салмактуу функциянын таасири бул балоодо кандай натыйжалуу болушу аныкталат.

Физика жана математиканын бир канча аймагында туюк ийри сызык боюнча ортонормалдуу полиномдордун түрү аныкталууда.

Бул полиномдор жалгыз ийри сызык боюнча берилген салмактуу функцияга карата ортонормалдуулук шарты менен белгилүү болгондуктан, алардын таасир бере турган ийри сызыктын, керек болсо салмактуу функциянын касиеттерине байланыштуу болуп өзгөрүлөт. Негизинде төмөнкү эки коюлган шарт изилденди:

i. Даражалуу функция катары белгилүү болгон салмактуу функция менен ийри сызыкты билдирген параметрлер арасында бир функционалдык тен салмактуулук аткарылган учурда бул полиномдордун кыймылы изилденди.
ii. Көрсөтүлгөн тен салмактуулук бузулган учурдагы полиномдордун кыймылы изилденди.

Ачкыч сөздөр : полином, ортонормалдуу полином, конформ чагылдыруу, толук эмес конформ чагылдыруу, толук эмес ийри сызык, түз ийри сызык

ПОВЕДЕНИЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ С ВЕСОМ МНОГОЧЛЕНОВ ПО КРИВОЙ

Зарипа Ташбаева

Кыргызско-Турецкий университет "Манас", Институт Естественных наук

Магистерская диссертация, Июнь 2018

Научный руководитель : д. ф.-м.,профессор Фахреддин Абдуллайев

АННОТАЦИЯ

В данной диссертации :

Мы исследовали движение в комплексном пространстве по закрытому кривому по отношению весовой функции ортонормальный комплекс переменного многочлена.Определяется геометрическая или функциональная особенность данного закрытого кривого и иследуется исходное влияние на этот процесс функциональных оссобенностей и весовой функции.

Определяются несколько видов средненормальных многочленов по закрытому кривому в некоторых областях физики и математики.

Эти полиномы идущие по единому закрытому кривому весовых функций по скольку они известны ортонормальным условием влияюшее им закрытые кривые могут менятся даже по причине особенностей функций. В основном были иследованы следуюшие два условия:

i. Весовая функция и известная как категориальная функция обозначаюший закрытаую кривую выполнено между параметрное функциональное равновесие и при этом исследованы движения полиномов.
ii. Были исследованы движения полиномов в показоном равновесии.

Ключевые слова : полином, ортонормальный полином, конформное отражение, не полное конформное отражение, не полная закрытая кривая, прямая закрытая кривая.

BEHAVIOR OF OTHONORMAL POLYNOMIALS OVER A CONTOUR WITH WEIGHT

Zaripa TASHBAEV

Kyrgyz-Turkish Manas University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2018

Supervisor: Prof.Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

ABSTRACT

In the present work:

We continue to study the growth of the orthogonal polynomials over a contour with a weight function in the weighted Lebesgue space, when the contour and the weight function have some singularities. The case where there is no interference of a weight function and acontour is studied. We consider a piecewise smooth contour with interior zero angles and investigate the case of more general contours.

The Nikolskii type estimations for algebraic polynomials in the bounded regions with piecewiseasymptotically conformal curve, having interior and exterior zero angles, in the weighted Lebesgue space.

Key words: Orthogonal polynomials, algebraic polynomials, conformal mapping, quasicircle, smooth curve.

İÇİNDEKİLER

EĞRİ ÜZERE AĞIRLIKLI ORTONORMAL POLİNOMLARIN DAVRANIŞLARI

Sayfa

4. BÖLÜM

1.BÖLÜM

1.1. GİRİŞ

$\Gamma \subset \mathbb{C}$, doğrultulabilir (ölçülebilir) kapalı Jordan eğrisi, $G = \operatorname{int}\Gamma,\ 0 \in G;\ \Omega = ext\Gamma,\ \infty \in \Omega,$ olsun. Her $p > 0$ için $L_p\left(h,\Gamma\right)$ ile Γ üzerinde integrallenebilir ve

$$\| f\|_{L_p(h,\Gamma)}^p := \int_\Gamma h\left(z\right)\left| f\left(z\right)\right|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlar ailesi gösterilsin.

Derecesi en fazla $n \in \mathbb{N}$ olan $P_n\left(z\right)$ kompleks cebirsel polinomlar kümesini $\wp_n$ ile gösterelim. $h\left(z\right)$, Γ eğrisi üzerinde integrallenebilir, negatif olmayan ve hemen hemen her yerde sıfır olmayan fonksiyon olsun.

$$\left\{K_n(z)\right\}_{n=0}^{\infty},\ K_n(z) = \mathrm{a}_n\, z^n + ... + a_0,\ \deg K_n = n,$$

polinomlar sistemi

$$\int_\Gamma h(z)K_n(z)\overline{K_m(z)}|dz| = \begin{cases} 1, & n = m \ \text{ ise} \\ 0, & n \neq m \ \text{ ise} \end{cases} \tag{1.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, ona Γ eğrisi üzere ortonormal polinomlar sistemi denir. Eğer baş terimin katsayısı $a_n > 0$ koşulu sağlanıyorsa, o halde bu sistem tek türlü tanımlanır. Aşikardır ki, $\|K_n\|_{L_2(h,\Gamma)} = 1$

$\left\{z_j\right\}_{j=1}^m \in \Gamma$ sonlu sayıda ayrık noktalar olsun. Bu çalışmada, ağırlık fonksiyonu olarak aşağıdaki fonksiyon ele alınacaktır:

$$h\left(z\right) = h_0\left(z\right)\prod_{j=1}^m \left|z - z_j\right|^{\gamma_j},\ \gamma_j > -1 \tag{1.2}$$

burada $h_0(z)$ fonksiyonu düzgün olarak sıfırdan ayrıktır, yani öyle bir $c_0 = c_0(\Gamma)$ sabiti vardır ki,

$$h_0(z) \geq c_0 > 0, \; z \in \Gamma$$

sağlanıyor.

Görüldüğü gibi, $\{z_j\}_{j=1}^{m} \in \Gamma$ sisteminin her bir noktası komşuluğunda $z \to z_j$ durumunda $h(z)$ ağırlık fonksiyonu sıfıra veya sonsuzluğa yaklaşabilir.

Bu Tez çalışmasında, esasında, kompleks düzlemde verilmiş çeşitli kapalı Jordan eğrilerine göre (1.2) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu ile ortonormal olan polinomlar için, ve de $P_n \in \wp_n$ keyfi cebirsel polinomları için ele alınacak temel problemler aşağıdaki şekilde söylenilebilir:

1) *Belli bir koşullar sağlandığında, verilmiş kapalı Jordan eğrisi ve* $K_n(z)$ *polinomu için*

$$|K_n(z)| \leq \eta_n, \qquad z \in \Gamma,$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\eta_n := \eta_n(\Gamma, h) > 0$ *sabitinin bulunması.*

2) *Bu belirtilen koşullar sağlanmadığında verilmiş kapalı Jordan eğrisi ve* $K_n(z)$ *polinomu için*

$$|K_n(z)| \leq \mu_n, \; z \in \Gamma$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\mu_n := \mu_n(\Gamma, h, z) > 0$ *sabitinin bulunması.*

3) *Her* $z \in \Gamma$ *ve* $P_n \in \wp_n$ *için*

$$|P_n(z)| \leq c_n(\Gamma, h) \|P_n\|_{L_p(h,\Gamma)}, \quad z \in \Gamma, \tag{1.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $c_n := c_n(\Gamma, h) > 0$ *sabitinin bulunması.*

Buradaki $\eta_n := \eta_n(\Gamma, h) > 0$, $\mu_n := \mu_n(\Gamma, h, z) > 0$ ve $c_n(\Gamma, h)$ sabiti h ağırlık fonksiyonu ve Γ eğrisinin özelliklerine bağlı olarak değişmektedir.

1.2 KAYNAK ARAŞTIRMASI

(1.3) problemi ile ilgili ilk sonuç, bilindiği kadarıyla, [30] de aşağıdaki gibi elde edilmiştir: Her $p > 0$ ve $P_n \in \wp_n$ polinomu için

$$\max_{|z|=1} |P_n(z)| \le 2n^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} \left|P_n\left(e^{it}\right)\right|^p dt \right)^{1/p} \tag{1.4}$$

eşitsizliği doğrudur. Daha sonra (1.4)'e benzeri değerlendirmeler, çeşitli düzgünlük koşullarını sağlayan Γ Jordan eğrisi için [30], [31], [32], [44] ve [36], [38], [36-40] vs. de elde edilmiştir.

Daha sonra, (1.4) tipindeki değerlendirmelerle ilgili sonuçlar, Mamedhanov [30] tarafından ölçülebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölgelerde, Nikol'skii [19] tek ve çok değişkenli polinomlar için, Abdullayev vd. [6-8], [30, 31] tek değişkenli polinomlar için, [38-40] de ortogonal polinomlar için vs. (daha fazla referans için bkz: [32] ve adı geçen referanslardaki kaynaklar) matematikçiler tarafından elde edilmiştir.

Ortogonal polinomlar için problemi daha iyi tanıtabilmemiz için bir değerlendirme verelim. Γ eğrisinin doğal denklemi $z = z(s),\ 0 < s < |\Gamma| = mes\Gamma$ olsun.

$\Gamma \in C(1,\alpha),\ 0 < \alpha < 1,$ denir eğer $z(s)$ fonksiyonu sürekli diferansiyelenebilir ve $z'(s) \in Lip\alpha$ ise. Eğer $\Gamma \in C(1,\alpha)$ her yerde fakat bir $z_1 \in \Gamma$ noktası hariç, öğleki $z'(s) \in Lip\alpha$, $0 < s < |\Gamma|$, ve $z(0) = z(|\Gamma|) = z_1$, $z'(0) = z'(|\Gamma|)$. Bu durumda $z_1 \in \Gamma$ noktasında Γ eğrisi herhangi bir $\nu_1\pi,\ 0 < \nu_1 < 2,$ dış açıya ($G = \operatorname{int}\Gamma$ sonlu bölgesine nazaran) sahip olacaktır. Bu tür eğriler sınıfı $\Gamma \in C(1,\alpha,\nu_1),\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \nu_1 < 2,$ ile gösterilsin.

[37,38] çalışmalarında ağırlık fonksiyonu ve eğrinin geometrisini dikkate alan

$$(1+\gamma_1)\omega_1 = 1 \tag{1.5}$$

koşulu sağlandığında $K_n(z)$ polinomu için (1.3) şeklinde değerlendirmeler nasıl olacağı incelenmiştir. Bu koşula eğri ve ağırlık fonksiyonunun "interferensiyası" denir. Bununla birlikte aynı zamanda, (1.5) koşulu sağlanmadığı halde, yani

$$(1+\gamma_1)\omega_1 \neq 1 \tag{1.6}$$

durumunda $K_n(z)$ polinomu için benzeri sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, eğer $(1+\gamma_1)\omega_1 < 1$ise o halde

$$|K_n(z)| \leq c(\Gamma)\left(n^{s_1} + |z - z_1|^{\sigma_1}\sqrt{n}\right), \ z \in \Gamma, \tag{1.7}$$

sağlanıyor, burada

$$s_1 = \frac{1}{2}(1+\gamma_1)\omega_1, \ \sigma_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\omega_1} - 1 - \gamma_1)$$

olarak tanımlanır. Benzeri şekilde $(1+\gamma_1)\omega_1 > 1$ koşulu için de $|K_n(z)|$nin üstten değerlendirilmesi yazılabilır.

2.BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR.

Tanım 2.1. f , G bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve $z_0 \in G$ için

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *türevlenebilir* denir ve bu limit $f'(z_0)$ ile gösterilir. f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir. Eğer G bölgesinde tanımlı f fonksiyonu, her bir $z \in G$ noktasında analitik ise f fonksiyonuna G *bölgesinde analitiktir* denir [15].

G bölgesinde analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile; G bölgesinde analitik ve $\bar{G}$ da sürekli olan fonksiyonların kümesi ise $A(\bar{G})$ ile gösterilir.

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{A(\bar{G})} := \max_{z\in\bar{G}} |f(z)|, \quad f \in A(\bar{G})$$

ile tanımlı $\|.\|_\infty : A(\bar{G}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $A(\bar{G})$ üzerinde bir normdur.

$a_0, a_1, ..., a_n$ kompleks sayılar olmak üzere

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0,$$

fonksiyonuna *n dereceli kompleks değişkenli cebirsel polinom* denir. Derecesi n'yi aşmayan tüm kompleks değişkenli cebirsel polinomlar sınıfı $\wp_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. $a,b \in \mathbb{R}$, $z : [a,b] \to \mathbb{C}$, $z = z(s)$ sürekli fonksiyonunun görüntüsüne kompleks düzlemde bir *eğri* denir.

i. $z(a) = z(b)$ koşulunu sağlayan eğriye *kapalı eğri* denir.

ii. $s_1 \neq s_2$ olan her $s_1, s_2 \in [a,b]$ için $z(s_1) \neq z(s_2)$ ise eğri Jordan eğrisi adını alır.

iii. Her $s\in[a,b]$ için $z'(s)$ var ve sürekli ise eğriye *diferansiyellenebilir* eğri denir. Ek olarak, her $s\in[a,b]$ için $z'(s)\neq 0$ ise *düzgün eğri* adını alır.

iv. Bir eğri, $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç diferansiyellenebiliyorsa ve bu sonlu sayıda noktaların her birinde eğrinin sağ ve sol türevleri var ve bu türevler eğrinin bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse eğriye *parçalı diferansiyellenebilir eğri* denir.

v. Bir parçalı diferansiyellenebilir eğri, diferansiyellenebildiği her s noktasında $z'(s)\neq 0$ koşulunu sağlıyorsa parçalı düzgün eğri adını alır.

Eğer eğri kapalı değilse, genel olarak ona *yay* veya *yol* adı verilir. Aksi belirtilmedikçe kapalı eğri ifadesi için sadece eğri ifadesi kullanılacaktır.

Basit bağlantılı bölgenin bir başka tanımı, eğriler yardımıyla verilir. G bölgesi içinde yer alan her bir γ kapalı Jordan eğrisi için $\operatorname{int}\gamma\subset G$ ise G bölgesine basit bağlantılı bölge denir. Burada $\operatorname{int}\gamma$, γ eğrisinin iç bölgesini, yani eğrinin sınırladığı sonlu bölgeyi gösterir [15].

Teorem 2.3. (Jordan teoremi) γ, kompleks düzlemde bir kapalı Jordan eğrisi olsun. γ eğrisi kompleks düzlemi ortak sınırları γ eğrisi olan biri sonlu diğeri sonsuz olan iki ayrık bölgeye ayırır. Bu bölgelerin her biri basit bağlantılı bölgedir [33].

Tanım 2.4. $[a,b]$ aralığının $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ şeklindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin ve $\ell(P):=\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})|$ olsun. Eğer $\sup\{\ell(P):\ P\in\mathbb{P}\}<\infty$ ise γ eğrisine *ölçülebilir* (*düzlenebilir*) *eğri* denir. Eğer γ eğrisi ölçülebilir ise $\sup\{\ell(P):\ P\in\mathbb{P}\}$ sayısı γ eğrisinin uzunluğunu verir ve bu uzunluk $mes(\gamma)$ ile gösterilir [35].

Teorem 2.5. Eğer γ parçalı düzgün eğri ise ölçülebilir ve aşağıdaki formül doğrudur [18]:

$$mes(\gamma)=\int_a^b|z'(t)|dt$$

Tanım 2.6. $H, G \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bölgeleri ve $f: H \to G$ fonksiyonu verilsin. Eğer

i. f bir homemorf fonksiyon, yani singüler noktaları sadece basit kutup noktası olan bir analitik fonksiyon,

ii. f birebir, yani $z_1 \neq z_2$ olan her $z_1, z_2 \in H$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$,

iii. f örten, yani $f(H) = G$

koşulları sağlanıyorsa f H *bölgesinden* G *bölgesine konform dönüşümdür* denir [35].

Teorem 2.7. (Riemann Dönüşüm teoremi). $G \subset \mathbb{C}$, sınırında en az iki nokta içeren bir basit bağlantılı bölge olsun. Bu durumda G bölgesini $B = \{\omega : |\omega| < 1\}$ dairesine resmeden $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $\omega = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır [34].

$0 < r < 1$ için $\Gamma_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r\}$ eğrisine iç seviye eğrisi denir. Riemann Dönüşüm Teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir:

Teorem 2.8. $G \subset \mathbb{C}$, sınırında en az iki nokta içeren bir bölge, $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$ ve $\Delta = \{\omega \in \overline{\mathbb{C}} : |\omega| > 1\}$ olmak üzere $\Phi(\infty) = \infty$ ve $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$ olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır [34].

$R > 1$ olmak üzere $\Gamma_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R > 1\}$ eğrisine dış seviye eğrisi denir. Bu eğri bir düzgün eğridir.

Tanım 2.9.. Bir γ yayı reel eksenin bir $\alpha \leq s \leq \beta$ aralığında $z = z(s) = x(s) + iy(s)$, $(a = z(\alpha),\ b = z(\beta))$ parametrik gösterime sahip olsun. $f = f(z)$ bir G bölgesinde tanımlı tek değerli bir kompleks fonksiyon olsun. $[\alpha, \beta]$ aralığının $D: \alpha = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = \beta$ şeklinde bir parçalanışı ele alınsın. Bu sayılara karşılık gelen γ yayı üzerindeki noktalar i

$z_k = z(s_k)$, $(k = 0, 1, \cdots, n,\ z(\alpha) = a,\ z(\beta) = b)$ olsun. Her bir $[s_{k-1}, s_k]$ aralığından keyfi bir t_k noktası seçilsin ve eğri üzerindeki karşılığı $\zeta_k = z(t_k)$ ile gösterilsin. Eğer parçalanışın normu sıfıra gittiğinde

$$\Sigma_D = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

ile tanımlı Σ_D toplamı sonlu limite sahip ise f fonksiyonun γ yayı üzerinde *kompleks çizgi integrali vardır* denir ve

$$\int_a^b f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

şeklinde gösterilir [34].

Teorem 2.10. γ, doğal parametrik denklemi $z = z(\mathrm{t}) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan düzgün eğri ve f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise aşağıdaki formül doğrudur [34]:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(\mathrm{t}))\mathrm{z}'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Teorem 2.11. (Cauchy İntegral Formülü). $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $f \in A(G)$ olsun. γ, $\overline{\mathrm{int}\gamma} \subset G$ koşunu sağlayan ölçülebilir kapalı Jordan eğrisi ise $z \in \mathrm{int}\gamma$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

formülü doğrudur [34].

Teorem 2.12. (Sonsuz Bölgeler İçin Cauchy İntegral Formülü). G bir bölge, $\Gamma := \partial G$, negatif yönlü, kapalı, ölçülebilir bir Jordan eğrisi olsun. $f(z) \in \mathrm{A}(\overline{\mathbb{C}} / G)$ ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(\infty) - f(z), \quad \mathrm{z} \in \overline{\Omega} / \overline{G}$$

formülü doğrudur [37].

Teorem 2.13. (Maksimum Modülüs Prensibi). $G \subset \mathbb{C}$ Jordan eğrisi ile sınırlı, sonlu bir bölge olsun. Eğer, $f \in A(\overline{G})$ ve f sabitten farklı ise $|f|$ maksimum değerini ∂G üzerinde alır [13].

Tanım 2.14. $\Gamma := \partial G$ düzlenebilir kapalı Jordan eğrisi ve $h(z) \geq 0$ Γ üzerinde tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$0 < \int_{\Gamma} h(z)|dz| < \infty$$

koşulunu sağlarsa h fonksiyonuna Γ üzerinde *ağırlık fonksiyonu* denir [11].

Tanım 2.15. $G \subset \mathbb{C}$ Jordan bölgesi ve $\Gamma := \partial G$ düzlenebilir kapalı Jordan eğrisi olsun. $h(z)$ Γ de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $p > 0$ olsun. $f \in A(\overline{G})$ ve

$$\int_{\Gamma} h(z)|f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonların sınıfı kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzay $L_p(h,\Gamma)$ ile gösterilir. $L_p(1,\Gamma) := L_p(\Gamma)$ [11].

$L_p(h,\Gamma)$ uzayında tanımlı aşağıdaki iki sayı elealınacaktır:

$$\|P_n\|_{L_p} := \|P_n\|_{L_p(h,\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} h(z) |P_n(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, 0 < p < \infty;$$

$$\|P_n\|_{L_\infty} := \|P_n\|_{L_\infty(1,\Gamma)} := \max_{z \in \Gamma} |P_n(z)|, \; p = \infty$$

Aşikardır ki, $\|\cdot\|_{L_p}$ quasinormdur, yani $1 \le p \le \infty$ için bir norm ve $0 < p < 1$ için bir $p-$ normdur.

Teorem 2.16. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $p \ge 1$ olsun. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(\Gamma)$ ve $g \in L_q(\Gamma)$ ise $f.g \in L_1(\Gamma)$ ve

$$\int_{\Gamma} |f(z)g(z)||dz| \le \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma} |g(z)|^q |dz| \right)^{\frac{1}{q}}$$

(Hölder Eşitsizlği);eşitsizliği doğrudur.

Eğer $f, g \in L_p(\Gamma)$ ise

$$\left(\int_{\Gamma} |f(z) + g(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Gamma} |g(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Minkowski Eşitsizliği) eşitsizliği sağlanır [20].

Bu Tez çalışması boyunva her yerde, $G \subset \mathbb{C}$, $0 \in G$, olarak $\Gamma := \partial G$ kapalı Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge, $\Omega := ext\Gamma := \overline{\mathbb{C}} / \overline{G}$, $(\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\})$, $\Delta := \{\omega : |\omega| > 1\}$ olarak ele alacağız. $\omega = \Phi(z), \Omega$ bölgesinin $\Delta := \{\omega : |\omega| > 1\}$ bolgesine $\Phi(\infty) = \infty, \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan konform ve yakınkat dönüşümü ve $\Psi := \Phi^{-1}$ olsun.

Her $t \geq 1$ ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma_t := \{z : |\Phi(z)| = t\} \quad (\Gamma_1 \equiv \Gamma), \quad G_t := int\Gamma_t, \quad \Omega_t := ext\Gamma_t$$

olarak işarentlensin.

Yine de tez boyunca $c, c_1, c_2, ...$ *ile pozitif ve* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 ...$ ile yeterince küçük pozitif (genel olrak, farklı ifadelerde farklı), genelde $G'ye$ bağlı sabitler gösterilir.

Her $k \geq 0$ *ve* $m > k$ *için* $j = \overline{k, m}$ *simgesi* $j = k, k+1, ...$ m i gösterir.

Tanım 2.17. $G, H \subset \mathbb{C}$ bölgeleri için $f : G \to H$ bir fonksiyon olmak üzere her $z \in G$ için $J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$ ve $f \in C^1$, yani sürekli diferansiyellenebilir bir homeomorfizma olsun. Eğer

$$\sup_{z\in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \leq K < \infty$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı K -yarıkonform dönüşüm, $K \geq 1$ sayısına da f dönüşümünün bir yarıkonformluk katsayısı denir [12].

Tanımdan görülür ki f fonksiyonu G bölgesinde K -yarıkonform dönüşüm ve , $k := \frac{K-1}{K+1}$ ise her $z \in G$ için

$$\frac{|f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2} \leq k < 1$$

dir. Yarıkonform dönüşümlerin bazı özellikleri aşağıdaki verilmiştir [12]:

i. Her bir konform dönüşüm 1-yarıkonformdur
ii. f_1, K_1 -yarıkonform dönüşüm ve f_2, K_2 -yarıkonform dönüşüm ise $f_1 \circ f_2$ bileşke dönüşümü $K_1 \cdot K_2$-yarıkonformdur.
iii. f dönüşümü K -yarıkonform ise f^{-1} de K -yarıkonformdur.

Tanım 2.18. Γ Jordan eğrisi, $\Gamma \subset D$ olacak şekilde bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. $f : D \rightarrow D'$ bir K-yarıkonform dönüşüm olmak üzere $f(\Gamma)$ çember ise Γ eğrisine *K-yarıkonform eğri* denir.

$F(\Gamma)$, Γ eğrisini çembere (ya da aralığa) resmeden tüm $f : D \supset \Gamma \rightarrow D'$ homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_\Gamma := \inf_{f \in F(\Gamma)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun. Eğer $K_\Gamma < \infty$ ise Γ eğrisine yarıkonform eğri denir. Eğer Γ, K-yarıkonform eğri ise $K_\Gamma \leq K$ ilişkisi doğrudur [4], [29].

Yarıkonform eğriler için daha kullanışlı olan geometrik tanım aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.19. Γ bir Jordan eğrisi, $z_1 \neq z_2$ olmak üzere $z_1, z_2 \in \Gamma$ noktaları için $l(z_1, z_2) \subset \Gamma$, z_1 ile z_2 noktasını birleştiren küçük çaplı yay olsun. Γ eğrisinin yarıkonform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in \Gamma, \\ z_3 \in l(z_1, z_2)}} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

koşulunun sağlanmasıdır [37].

Bu teoremden aşağıda verilen sonuçlar elde edilir:

i. Yarıkonform eğriler " sıfır açı" içermez.
ii. Yarıkonform eğriler lokal ölçülebilir olmayabilir.
iii. Γ analitik yay veya eğri ise 1-yarıkonformdur.
iv. Γ sürekli teğete sahip eğrisi her $\varepsilon > 0$ için $1 + \varepsilon$ -yarıkonformdur [22].

Tanım 2.20. Eğer her bir $\psi : B \to G$ konform ve tek katlı dönüşümü bir $0 \le k < 1$ için $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ olarak $\frac{1+k}{1-k}$-yarıkonform dönüşümüne genişletilebilirse G bölgesine k-yarıdaire denir. Eğer bir $0 \le k < 1$ için G bölgesi k-yarıdairesi ise G bölgesine bir yarıdaire denir [9].

Bu durumda, $\Gamma = \partial G$ eğrisine k - yarı konform eğri $0 \le k < 1$ denir.

Yarıkonform eğriler kümesi $Q(k), 0 \le k < 1$ ile gösterilir, eğer $0 \le k < 1$ *için* $\Gamma \in Q(k)$ ise o halde $\Gamma \in Q$ yazılır.

Tanım 2.21. *Söyleyeceğiz ki* $\Gamma \in Q(k)$, *ve* Γ *düzgün ise* $\Gamma \in \tilde{Q}(k)$, $0 \le k < 1$, *benzer şekilde eğer ise* $\Gamma \in Q(k)$, $\quad 0 \le k < 1$

Tanım 2.22. l Jordan eğrisine asimtotik konform eğri([42], [44]) denir eğer:

$$\sup_{z_1, z_2 \in l,\, z \in l(z_1, z_2)} \frac{|z_1 - z| + |z - z_2|}{|z_1 - z_2|} \to 1, \quad |z_1 - z_2| \to 0$$

ise.

Eğer $\Gamma = \partial G \in AC$ ise bu sınıfı AC olarak göstereceğiz ve $G \in AC$.

Bu eğriler ile ilgili çalışmalara J.M. Anderson, J. Becker, F.D. Lesley [14], E.M.Dyníkin [19], Ch.Pommerenke, S.E. Warschawski [35], V.Ya. Gutlyanskii, V.I. Ryazanov [21], [22], [23] vd. çalışmalarda rastlanır.

Teorem 2.19 geometrik kriterlerine göre, asimptotik eğrile yarıkonform dırlar ([14, s.81], [23, s.107]). Her düzgün eğri asimptotik konformdur.

Bu yarıkonform eğrilerin düzlenebilir olmayabilirliği iyi bilinir (bkz. örneğin, [16], [39, s.104]). Aynı hüküm asimptotik eğriler için de geçerlidir.

Eger Γ düzlenebilir ve $\Gamma \in AC$ ise $L \in AC$. Eğer l yayı bir asimptotik konform eğrisinin alt parçası ise, bu l yayına asimptotik konform yay denir.

Şimdi ise, parçalı asmptotik eğri ile sınırlı , iç ve dış sıfır açılara sahip bölgeler sınıfı tanımlayalım.

Her hangi bir $i = 1, 2, ..., k = 0, 1, 2$ *ve* $\varepsilon_1 > 0$ için $f_i : [0, \varepsilon_1] \to \mathbb{R}^+$ *ve* $g_i : [0, \varepsilon_1] \to \mathbb{R}^+$ iki farklı fonksiyonlar ailesi olsun , öyle ki

$$f_i(0)=g_i(0)=0,\ \ f_i^{(k)}(x)>0,\ \ g_i^{(k)}(x)>0,\ \ 0<x\le\varepsilon_1 \tag{2.1}$$

sağlansın.

Tanım 2.23. Söyleyeceğiz ki, (2.1) ile tanımlı her $f_i=f_i(x)\quad i=\overline{1,m_1}$ ve $g_i=g_i(x),\ i=\overline{m_1+1,m}$ fonksiyonlar ailesi için $G\in AC(f_i,g_i)$, eğer $\Gamma=\partial G$, Γ_i asimptotik konform yaylarının $\{z_j\}_{i=0}^{m}\in\Gamma$ noktalarında birleşiminden $\Gamma=\bigcup_{i=0}^{m}\Gamma_i$ oluşmuş , öyle ki , $\Gamma=\partial G$ eğrisi $z_0\in\Gamma\setminus\{z_j\}_{i=1}^{m}$ noktasında lokal asimptotik konform yay ve merkezi orijinde yerleşen (x,y) yerel sistemide aşağıdaki koşullar sağlansın:

a) Her $z_i\in\Gamma,\ i=\overline{1,m_1},\ m_1\le m,$

$$\left\{z=x+iy:|z|\le\varepsilon_1,\ c_{11}^i f_i(x)\le y\le c_{12}^i f_i(x),\ 0\le x\le\varepsilon_1\right\}\subset\overline{G},$$
$$\left\{z=x+iy:|z|\le\varepsilon_1,\ |y|\ge\varepsilon_2 x,\ 0\le x\le\varepsilon_1\right\}\subset\overline{\Omega};$$

b) Her $z_i\in\Gamma,\ i=\overline{\mathrm{m}_1+1,\mathrm{m}}$

$$\left\{z=x+iy:|z|\le\varepsilon_3,\ c_{21}^i g_i(x)\le y\le c_{22}^i g_i(x),\ 0\le x\le\varepsilon_3\right\}\subset\overline{\Omega},$$
$$\left\{z=x+iy:|z|<\varepsilon_3,\ |y|\ge\varepsilon_4 x,\ 0\le x\le\varepsilon_3\right\}\subset\overline{G};$$

Burada , $-\infty<c_{11}^i<c_{12}^i<\infty,\ \ -\infty<c_{21}^i<c_{22}^i<\infty,$ ve $\varepsilon_s>0,\ s=\overline{1,4}$ belli bir sabitlerdirler.

Tanım 2.24. *Söyleyeceğiz ki* $\Gamma\in AC$, eğer $\Gamma=\partial G$ düzlenebilir ve $G\in AC(f_i,g_i),\ f_i=f_i(x),\ i=\overline{1,m_1},\ g_i=g_i(x),\ i=\overline{m_1+1,m}$, ise.

Tanım 2.23 ve Tanım 2.24 den açık görülüyor ki, her $G\in AC(f_i,g_i)$ bölgesi $\{z_i\}_{i=1}^{m}\in\Gamma$ noktalarında m_1 tane iç ve $m-m_1$ tane dış sıfır açılara sahip olabilir. Eğer G bölgesi iç sıfır açıya sahip değil ise $(m_1=0)$ $G\in AC(0,g_i)$, ve dış sıfır açıya sahip değilse $(m_1=m)$ $G\in AC(f_i,0)$ yazılır.

Eğer G bölgesi sıfır açılara sahip değil $(m=0)$ ve G sınırlı düzlenebilir asimptotik konform eğri ile sınırlı ise o halde $AC(0,0)\equiv AC.$ [8] 'de $\Gamma\in\tilde{Q}(k),\ \ 0\le k<1$ için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

Teorem 2.25. $p>0$ **ve** $\Gamma\in\tilde{Q}(k)$, $0\le k<1$, olsun. $h(z)$ $\gamma_j=0$ $j=\overline{1,m}$ *için (1.2) ile tanımlı olsun. O halde her* $n\in\mathbb{N}$ *için aşağıdaki doğrudur*

$$\|P_n\|_{L_\infty}\le c_1(n+1)^{\frac{1+k}{p}}\|P_n\|_{L_{p(h_0,\Gamma)}} \tag{2.1}$$

Burada Teorem 2.25, $|P_n(z)|$ nin Γ üzerindeki büyümesini gösterdi. Bu sonuç $\Gamma:=\{z:|z|=1\}$ için de [30] $k=0$ durumu için elde edilmiştir. Daha sonra (2.1) e benzer klasik sonuç [41] -de elde edilmiştir. Çeşitli özeliklere sahip eğriler için benzer sonuçlar $h(z)\equiv1$ $(veya\ h(z)\ne1)$, $0<p<\infty$, için [29, 30, 36, 42] [11,Teorem 6], [1-7] bulunmuştur (daha fazla referans [31, sekt.5.3] bulunur).

Şimdi biz başka karekteristikle daha bir genel eğri sınıfı tanımlayalım.

Tanım 2.26. *Söyleyeceğiz ki,* $\Gamma\in Q_a$, $0<a<1$, *eğer* $\Gamma\in Q$ *ve* $\Phi\in Lipa$, $z\in\bar{\Omega}$.

Q_a sınıfı yeterince geniştir.

Sonuç 2.26.

a) Eğer $\Gamma=\partial G$ Dini – düzgün eğriyse [33.p. 48], o zaman $\Gamma\in Q_1$ dir.

b) Eğer $\Gamma=\partial G$ parçalı Dini – düzgün eğriyse ve Γ deki en büyük dış açı $a\pi$, $0<a\le1$ $[33, p.52]$ ise, o zaman $\Gamma\in Q_a$ dır.

c) $\Gamma=\partial G$ sürekli teğete sahip düzgün eğriyse, o zaman tüm $0<a<1$ için $\Gamma\in Q_a$ dır.

d) Eğer Γ yarı düzgün ise, yani keyfi iki $z_1,z_2\in\Gamma$ için eğer $s(z_1,z_2)$ Γ üzerindeki z_1 ve z_2 yi birleştiren küçük yayın uzunluğunu göstermiş olmakla, öyle bir

$c>1$ vardır öyle $s(z_1,z_2)\le c|z_1-z_2|$ sağlansın, o halde $\Phi\in Lipa$,

$a=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{c}\right)^{-1}$ dır $[16]$.

e) Eğer Γ (yarı konformal) ise, o zaman $\Phi\in Lipa$ için $a=\dfrac{\pi}{2\left(\pi-\arcsin\frac{1}{c}\right)}$

[28]

f) Γ eğrisi asimtotik konform eğri ise, o zaman $\Phi\in Lipa$ için $0<a<1$ dır

[28].

Tanım 2.27. *Eğer $\Gamma\in Q_a$ ve Γ düzlenebilir ise, o zaman $\Gamma\in\tilde{Q}_a$, $0<a\le 1$ yazacağız.*

Teorem 2.28. $p>0$ **ve** $L\in\tilde{Q}_a$, $\frac{1}{2}\le a\le 1$, *ve* $h(z)$*, (1.2) ile tanımlı olsun. O halde her* $\gamma_i>-1$, $i=\overline{1,m}$ *ve* $P_n\in\wp_n$, $n\in N$ *için aşağıdaki doğrudur.*

$$\|P_n\|_{L_\infty}\le c_4 n^{\frac{\tilde{\gamma}+1}{p\beta_i}}\|P_n\|_{L_{p(h,\Gamma)}}\ ,\quad \tilde{\gamma}:=\max\left\{0,\ i=\overline{1,m}\right\} \tag{2.2}$$

Tanım 2.29. Söyleyeceğiz ki $\Gamma\in Q[\nu]$, $0<\nu<1$ *, eğer*

a. $\Gamma\in Q$,

b. her $z\in\Gamma$ *için öyle bir* $r:=r(\Gamma,z)>0$ *ve* $\nu:=\nu(\Gamma,z)$, $0<\nu<2$ *sayıları bulunsun ki, köşe noktası* $z\in\Gamma$ *de yerleşen*

$S(z;r,\nu):=\left\{\zeta:\zeta=z+re^{i\theta\pi},\ \theta_0<\theta<\theta_0+\nu\right\}$ *r yarıçapılı ve $\nu\pi$ açılmı olan dairsel sektör* $\bar{G}$ *de yerleşsin.*

Tanım 2.30. *Söyleyeceğiz ki,* $\Gamma\in\tilde{Q}_a[\nu_1...,\nu_m]$, $0<\nu_1...,\nu_m<2$, $0<a\le 1$*, eğer* $\{\zeta_i\}_{i=1}^m\in\Gamma$ *sistemi varsa o zaman* $\Gamma\in\tilde{Q}[\nu_i]$, $\zeta_i\in\Gamma$, $i=\overline{1,m}$ *ve* $\Phi\in Lipa$, $0<a\le 1$, $z\in\bar{\Omega}\setminus\{\zeta_i\}$.

Eğer $\nu_i = 1 \;\; i = \overline{1,m}$, ise o halde $L \in \tilde{Q}_a[1] := \tilde{Q}_a$ yazılır.

Teorem 2.31. $p > 0,\;\; \Gamma \in \tilde{Q}_a[\nu_1,...,\nu_m]$, $0 < \nu_1,....,\nu_m < 1,\;\; \dfrac{1}{2-\nu_i} \le a \le 1$ ve $h(z)$ (1.2) ile *tanımlı olsun. Eğer* $\gamma_i + 1 = \dfrac{1}{a(2-\nu_i)}$ ise, o *halde her* $P_n \in \wp_n$, $n \in N,$ *için aşağıdaki doğrudur.*

$$\left|P_n(z_i)\right| \le c_3 (n+1)^{\frac{\gamma_i+1}{p}(2-\nu_i)} \left\|P_n\right\|_{L_p(h,\Gamma)} \qquad (2.3)$$

ve

$$\left\|P_n\right\|_{L_\infty} \le c_3 (n+1)^{\frac{1}{ap}} \left\|P_n\right\|_{L_p(h,\Gamma)} \quad . \qquad (2.4)$$

Sonuç 2.32. $\Gamma \in \tilde{Q}_a[\nu_1,...,\nu_m]$, $0 < \nu_1,....,\nu_m < 1,\;\; \dfrac{1}{2-\nu_i} \le a \le 1$ *, ve* $h(z)$ *(1.2) ile tanımlı olsun. O halde her* $K_n \in \wp_n$ $\;\; n \in N$ *için aşağıdaki doğrudur:*

$$\left|K_n(z_i)\right| \le c_4 (n+1)^{\frac{\gamma_i+1}{2}(2-\nu_i)} \qquad (2.6)$$

ve

$$\left\|K_n\right\|_{L_\infty} \le c_4 (n+1)^{\frac{1}{2a}} \qquad (2.7)$$

S ölçülebilir Jordan eğrisi veya yayı ve $z = z(s), s \in [0,|S|], |S| := mes\, S,$ ise onun doğal parametrik denklemi olsun.

Tanım 2.33. *Söyleyeceğiz ki,* S *Jordan eğrisi veya yayı* $S \in C_\theta$ *dır (düzgün yaydır), eğer her* $z(s)$ *noktasında* S *eğrisi veye yayı* $\theta(z) := \theta(z(s))$ *sürekli teğete sahip ise.*

Tanım 2.34. *Söyleyeceğiz ki, Jordan eğrisi* $\Gamma \in PC_\theta(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ $0 < \lambda_i \le 2 \;\; i = \overline{1,m}$, *eğer* Γ *- sonlu sayıda* $\{\Gamma_i\}_{i=1}^m, C_\theta$ *düzgün yayların öyle birleşiminden oluşmuş ki bu yaylar* $\{z_i\}_{i=1}^m \in \Gamma$ *birleşme noktalarında* $\bar{G}$ *-a nazaran* $\lambda_i \pi \;\; 0 < \lambda_i \le 2$ *dış açılara sahip olsunlar.*

Her parçalı düzgün eğri bir yari konform eğridir [1,p.100].

Tanım 2.35. ([33,p.48] (ayrıca [10])). *Söyleyeceğiz ki, S ölçülebilir Jordan eğrisi Dini-düzgündür ($S \in DS$), eğer onun doğal parametrik denklemi $z = z(s),\ 0 \le s \le |S|$,*

$z^{'}(s) \neq 0,\ 0 \le s \le |S|$ *için öyle bir artan g fonksiyonu varsa ki,*

$\left|z^{'}(s_2) - z^{'}(s_1)\right| < g(s_2 - s_1),\ s_1 < s_2$ *ve*

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx < \infty$$

koşulları sağlansın.

Tanım 2.36. *Söyleyeceğiz ki, $\Gamma = \partial G$ Jordan eğrisi*

$\Gamma \in PDS(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m),\ 0 < \lambda_i \le 2,\ i = \overline{1,m}$ *,eğer $\Gamma = \partial G$ sonlu sayıda $\left\{\Gamma_j\right\}_{j=0}^{m}$ Dini-düzgün yayların $\left\{z_j\right\}_{j=0}^{m} \in \Gamma$ noktalarında öyle birleşiminden oluşmuş ki, bu yaylar $\left\{z_j\right\}_{j=0}^{m} \in \Gamma$, $i = \overline{1,m}$, noktalarında $\overline{G}$ - a nazaran $\lambda_i \pi,\ 0 < \lambda_i \le 2$ dış açıya sahip olsun.*

3.BÖLÜM

BAZI YARDIMCI SONUÇLAR

Bu bölümde esas sonuçların ispatı için gerekli yardımcı sonuçlar yer almaktadır.

Her $z \in \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$ ve $\delta > 0$ için

$$d(z,M) = dist(z,M) := \inf\{|z-\zeta|,\ \zeta \in M\};$$

$$B(z,\delta) := \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\},\ \Omega(z,\delta) := \Omega \cap B(z,\delta)$$

işaretleyelim.

Lemma3.1. Γ *-bir* K *-yarıkonformal eğri* $z_1 \in \Gamma,\ z_2, z_3 \in \Omega \cap B(z_1, d(z_1, \Gamma_{r0}))$; $\omega_j = \Phi(z_j)$, $j = 1,2,3$*, olsun. O halde*

a. $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$ *ve* $|\omega_1 - \omega_2| \preceq |\omega_1 - \omega_3|$ *ifadeleri eşdeğerdir ve benzer şekilde* $|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3|$ *ve* $|\omega_1 - \omega_2| \asymp |\omega_1 - \omega_3|$ *eşdeğerdir.*

b. Eğer $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$ *ise, o zaman*

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_2}\right|^{K^2} \preceq \left|\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \preceq \left|\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_2}\right|^{K^{-2}},$$

dır, burada $\Gamma_{r_0} := \{z = \psi(\omega) : |\omega| = r_0\}$ *dır.*

Sonuç 3.2. *Eğer* $z_3 \in \Gamma_{R_0}, R_0 > 1$ *, tespit edilmiş nokta ise, o zaman*

$$|\omega_1 - \omega_2|^{K^2} \preceq |z_1 - z_2| \preceq |\omega_1 - \omega_2|^{K^{-2}}$$

dir.

Sonuç 3.3. *Eğer* $\Gamma \in C_\theta$ *ise , o zaman her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$|\omega_1 - \omega_2|^{1+\varepsilon} \preceq |z_1 - z_2| \preceq |\omega_1 - \omega_2|^{1-\varepsilon}$$

dir

Hatırlayalım ki, $\{z_j\}_{j=1}^{m}$ Γ eğrisi üzerinde yerleşen biri birinden farklı sonlu sayıda noktalar sistemi gösterilir ve $h(z)$ ağırlıklı fonksiyonu (1.2) ile tanımlansın. Aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim:

$$0<\delta_j<\delta_0:=\frac{1}{4}\min\left\{\left|z_i-z_j\right|:i,j=1,2,...,m,i\neq j;\right\}\ \Omega\left(z_j,\delta_j\right):=\Omega\cap\left\{z:\left|z-z_j\right|\leq\delta_j\right\};$$

$$\delta:=\min_{1\leq j\leq m}\delta_j,\ \Omega(\delta):=\bigcup_{j=1}^{m}\Omega\left(z_j,\delta\right),\widehat{\Omega}:=\Omega\setminus\Omega(\delta)$$

$$\Delta_j:=\Phi\left(\Omega\left(z_j,\delta\right)\right),\ \Delta(\delta):=\bigcup_{j=1}^{m}\Phi\left(\Omega\left(z_j,\delta\right)\right),\ \widehat{\Delta}(\delta):=\Delta\setminus\Delta(\delta).$$

Ayrıca, bu çalışma boyunca $0<\varepsilon_0<1$ sabiti için $R=1+\frac{\varepsilon_0}{n+1}$ olarak ele alacağız.

Daha sonra;

$$\omega_j:=\Phi\left(z_j\right),\varphi_j:=\arg\omega_j,\Gamma^j:=\Gamma\cap\bar{\Omega}^j,\Gamma_R^j:=\Gamma_R\cap\Omega^j,\ j=\overline{1,m}, \qquad (3.1)$$

olarak işaretleyelim, burada $\Omega^j:=\psi\left(\Delta_j^{'}\right)$,

$$\Delta_1^{'}:=\left\{t=Re^{i\theta},\frac{\varphi_m+\varphi_1}{2}\leq\theta<\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right\},$$

$$\Delta_m^{'}:=\left\{t=Re^{i\theta},\frac{\varphi_{m-1}+\varphi_m}{2}\leq\theta<\frac{\varphi_m+\varphi_1}{2}\right\}$$

ve her $j=\overline{2,m-1}$ için

$$\Delta_j^{'}:=\left\{t=Re^{i\theta},\frac{\varphi_{j-1}+\varphi_j}{2}\leq\theta<\frac{\varphi_j+\varphi_{j+1}}{2}\right\}$$

dır;

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma^j;\Gamma_R=\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_R^j$$

Ψ'- değerlendirmesi için aşağıdaki faktı kullanacağız:

$$\left|\Psi(\tau)\right| \approx \frac{d\left(\Psi(\tau),\Gamma\right)}{|\tau|-1} \tag{3.2}$$

Aşağıdaki lemma, Lemma [25,44]'da verilen sonuçlardan elde edilir.

Lemma 3.4. $\Gamma \in PC_\theta(\lambda_1,....,\lambda_m)$, $0<\lambda_j<2$, $j=\overline{1,m}$ *olsun. O zaman keyfi küçük* $\varepsilon>0$ *sayısı ve*

i. *her* $\omega \in \Delta_j$ *için* $|\omega-\omega_j|^{\lambda_j+\varepsilon} \preceq |\Psi(\omega)-\Psi(\omega_j)| \preceq |\omega-\omega_j|^{\lambda_j-\varepsilon}$,

$$|\omega-\omega_j|^{\lambda_j-1+\varepsilon} \preceq |\Psi'(\omega)| \preceq |\omega-\omega_j|^{\lambda_j-1-\varepsilon};$$

ii. *her* $\omega \in \overline{\Delta}\setminus\Delta_j$ *için*

$$(|\omega|-1)^{1+\varepsilon} \preceq d\left(\Psi(\omega),\Gamma\right) \preceq (|\omega|-1)^{1-\varepsilon},\ (|\omega|-1)^{\varepsilon} \preceq |\Psi'(\omega)| \preceq (|\omega|-1)^{-\varepsilon}$$

dır.

Aşağıdaki lemma, $[33],[10,p.24-28]$ ve (3.2) den elde edilir (bkz, [9,Th.2.8]):

Lemma 3.6. $\Gamma \in PDS(\lambda_1,....,\lambda_m)$, $0<\lambda_j\le 2$, $j=\overline{1,m}$ *verilsin O halde*

i. *her* $\omega \in \Delta_j$ *için*

$$|\Psi(\omega)-\Psi(\omega_j)| \asymp |\omega-\omega_j|^{\lambda_j},$$

$$|\Psi'(\omega)| \asymp |\omega-\omega_j|^{\lambda_j-1};$$

ii. *her* $\omega \in \overline{\Delta}\setminus\Delta_j$ *için*

$$|\Psi(\omega)-\Psi(\omega_j)| \asymp |\omega-\omega_j|, |\Psi'(\omega)| \asymp 1$$

sağlanıyor.

Lemma 3.7. Γ *düzlenebilir Jordan eğrisi ve* $h(z)$ *(1.2) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun . O halde her* $P_n(z)\in\wp_n$, $R>1$ *ve* $n\in N$ *için aşağıdaki doğrudur.*

$$\|P_n\|_{L_p(h,\Gamma_R)} \leq R^{n+\frac{1+\gamma*}{p}} \|P_n\|_{L_p(h,\Gamma)}, \quad \gamma* = \max\left\{\gamma_j,\, j=\overline{1,m}\right\},\, p>0 \tag{3.3}$$

Uyarı 3.8. $h(z) \equiv 1$ için (3.3) değerlendirmesi [26]'de elde edilmiştir.

4. BÖLÜM

BULGULAR

Bu bölümde Tez'in esas sonuçlarını ve onların ispatlarını vereceğiz.

Teorem 4.1. $p>0$ ve keyfi tespit edilmiş $0<\nu_1<1$ *ve* $\frac{1}{2-\nu_1}\le a\le 1$ *için* $\Gamma\in\tilde{Q}_a[\nu_1]$ *olsun.* $h(z)$*, (1.2) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun ve* $z_1\in\Gamma$ *noktasında*

$$\gamma_1+1<\frac{1}{a(2-\nu_1)}$$

sağlansın. O halde her $z\in\Gamma$ *ve* $P_n\in\wp_n$, $n\in N$ *için* $\exists c_5=c_5(\Gamma,p,\gamma_1,\nu_1 a)>0$ *sabiti vardır ki aşağıdaki sağlanır:*

$$|P_n(z)|\le c_5\left[(n+1)^{s_1}+|z-z_1|^{\sigma_1}(n+1)^{1/pa}\right]\|P_n\|_{L_p(h,L)}$$

ve

$$|P_n(z)|\le c_5(n+1)^{s_1}\|P_n\|_{L_p(h,L)}$$

burada

$$s_1=\frac{1+\gamma_1}{p}(2-\nu_1),\qquad \sigma_1=\frac{1}{2a(2-\nu_1)}-\frac{1+\gamma_1}{2}$$

dır.

Sonuç 4.2. Teorem 4.1-in koşulları dahilinde

$$|K_n(z)|\le c_5\left[(n+1)^{s_1}+|z-z_1|^{\sigma_1}(n+1)^{1/2a}\right]$$

burada

$$s_1=\frac{1+\gamma_1}{2}(2-\nu_1),\qquad \sigma_1=\frac{1}{2a(2-\nu_1)}-\frac{1+\gamma_1}{2}$$

Aşıkardır ki, $a \geq \dfrac{1}{2-\nu_1}$ olduğundan, $\gamma_1 + 1 < \dfrac{1}{a(2-\nu_1)}$ eşitsizliği $-1 < \gamma_1 < 0$ için sağlaniyor. Bu durumda $z \to z_1$ yaklaştığında $h(z) \to \infty$. Bu nedenle böyle singülerite $\lambda_1 = 1 - a(2-\nu_1)(1+\gamma_1)$ mertebeden "cebirsel kutup" olarak adlandırılır.

Eğer Γ ve $h(z)$ aynı zamanda iki singuler noktaya sahip iseler, o zaman Sonuç 4.2 ye benzeri şekilde aşağıdki değerlendirme yazılabilir:

$$\begin{aligned} |K_n(z)| \leq c_6 |z-z_1|^{\sigma_1} (n+1)^{s_2} + c_7 |z-z_2|^{\sigma_2} (n+1)^{s_1} \\ + c_8 |z-z_1|^{\sigma_1} |z-z_2|^{\sigma_2} (n+1)^{1/2a}, \ z \in L, \end{aligned}$$

$c_j = c_j(\Gamma, \gamma_i, \nu_i, a)$ $j = 6,7,8$ her hangi bir sabitler, burada $s_i, \sigma_i, i = 1,2$ Sonuç 4.3-dekilere benzeri şekilde yazılır.

Sonuç 4.3. E*ğer* $\Gamma \in C(1, a, \omega_1)$, $1 \leq \omega_1 \leq 2$, *ve* $(\gamma_1 + 1)\omega_1 < 1$ *koşullu* z_1 *noktasında sağlanıyorsa, o zaman*

$$|K_n(z)| \leq c_5 \left[(n+1)^{s_1} + |z-z_1|^{\sigma_1} \sqrt{n+1} \right],$$

burada

$$s_1 = \frac{1}{2}(1+\gamma_1)\omega_1, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1 - \gamma_1 \right)$$

dır.

Sonuç 4.3 değerlendirmesi [42, Teorem 2] deki sonucu veriyor.

Teorem 4.1'in ispatı: $\Gamma \in \tilde{Q}_a[\nu_1]$ $0 < \nu_1 < 1$, $\dfrac{1}{2-\nu_1} < \alpha \leq 1$ olsun ve $h(z)$ (1.2) ile tanımlı olsun. Her $R > 1$ için, $\omega = \varphi_R(z)$ ile G_R'yi B birim dayresine gönderen dönüşümü gösterelim, öyle ki, $\varphi_R(0) = 0$, $\varphi_R^{'} > 0$ koşulları sağlansın $\{\zeta_j\}, 1 \leq j \leq m \leq n,$ ile $P_n(z)$ nin G_R nin içinde kalan sıfırlarını işaretleyelim.

$$B_{m,\mathrm{R}(z)} := \prod_{j=1}^{m} \tilde{B}_{j,R(z)} = \prod_{j=1}^{m} \frac{\varphi_R(z)-\varphi_R(\zeta_i)}{1-\overline{\varphi_R(\zeta_i)}\varphi_R(z)} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanan ifadeye $P_n(z)$nin $\{\zeta_j\}$, $1 \le j \le m \le n$ sıfırlara göre yazılmış Blaschke çarpımını verir ([40]). Buradan görülür ki,

$$\left|B_{m,\mathrm{R}}(z)\right| \equiv 1, \quad z \in \Gamma_R = \partial G_R \tag{4.2}$$

ve

$$\left|B_{m,R}(z)\right| < 1, \quad z \in G_R \tag{4.3}$$

her $p > 0$ ve $z \in G_R$ için

$$T_n(z) := \left[\frac{P_n(z)}{B_{m,R}(z)}\right]^{p/2} \tag{4.4}$$

olarak tanımlayalım.

$T_n(z)$ fonksiyonu G_R de analitik kapanışı $\bar{G}_R$ de sürekli.ve G_R 'de sıfırları yok. $T_n(z)$ nin keyfi sürekli dalını alıyoruz. Bu dalı için, aynı işaretlemeyi sürdürüyoruz. Bu ele alınmış $T_n(z)$ için G_R de Cauchy integral formülünü yazalım.

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} T_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G_R \tag{4.5}$$

(4.5)'de once $z = z_1$ koyup sonra alınan ifadeyi (4.5) ten taraf- tarafa çıkaracağız. Bunun sonucu olarak

$$T_n(z) - T_n(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} T_n(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1}\right] d\zeta$$

$$(4.6) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \left[\frac{P_n(\zeta)}{B_{m,R}(\zeta)}\right]^{p/2} \left[\frac{z - z_1}{(\zeta - z)(\zeta - z_1)}\right] d\zeta$$

elde ederiz. Keyfi $z \in \Gamma$, $z \ne z_1$ için, (4.6) eşitliğinin her iki tarafında $(z - z_1)^{-\sigma_1}$ -e çarparak değerlendirmeye geçilirse

$$\left|\frac{T_n(z)-T_n(z_1)}{(z-z_1)^{\sigma_1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left|P_n(\zeta)\right|^{p/2}\left|\frac{(z-z_1)^{1-\sigma_1}}{(\zeta-z)(\zeta-z_1)}\right||d\zeta| \tag{4.7}$$

bulunur. Her $\zeta\in\Gamma_R$ için $\left|B_{m,R}(\zeta)\right|=1$ dır. Şimdi sağ tarafte integral ifadenin pay ve paydasını $h^{1/2}(\zeta)$-e çarparak ve daha sonra Hölder eşitsizliğini kullanarak, buluruz:

$$\left|\frac{T_n(z)-T_n(z_1)}{(z-z_1)^{\sigma_1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\Gamma_R} h(\zeta)\left|P_n(\zeta)\right|^{p}|d\zeta|\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_R}\frac{|z-z_1|^{2-2\sigma_1}}{|\zeta-z|^2|\zeta-z_1|^{2+\gamma_1}}|d\zeta|\right)^{1/2}$$

$$=:\frac{1}{2\pi}\left(J_{n,1}\times J_{n,2}\right)^{1/2}, \tag{4.8}$$

burada

$$J_{n,1}:=\int_{\Gamma_R} h(z)\left|P_n(\zeta)\right|^{p}|d\zeta| = \left\|P_n\right\|^{p}_{L_p(h,\Gamma_R)} \tag{4.9}$$

$$J_{n,2}:=\int_{\Gamma_R}\frac{|z-z_1|^{2-2\sigma_1}}{|\zeta-z|^2|\zeta-z_1|^{2+\gamma_1}}|d\zeta|.$$

O zaman $z\in\Gamma$ için Lemma 3.7 den, biz

$$\left|\frac{T_n(z)-T_n(z_1)}{(z-z_1)^{\sigma_1}}\right| \preceq \left\|P_n\right\|^{\frac{p}{2}}_{L_p}\cdot\left(J_{n,2}\right)^{1/2},\ z\in\Gamma\setminus\{z_1\}.$$

elde ederiz. (4.4)'ü gözönünde bulundurarak yazabiliriz:

$$\left|\frac{P_n(z)}{B_{m,R}(z)}\right|^{p/2} \le c_9\left|\frac{P_n(z_1)}{B_{m,R}(z_1)}\right|^{p/2} + c_{10}\left\|P_n\right\|^{\frac{p}{2}}_{L_p}\cdot\left(J_{n,2}\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

[45, p. 121] verilmiş aşağıdaki eşitsizliklere göre,

$$\begin{aligned}|A+B|^p &\le 2^{p-1}\left(|A|^p+|B|^p\right),\quad p>1\\ |A+B|^p &\le |A|^p+|B|^p, 0<p\le 1,\ A>0,\ B>0\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.10)'dan

$$\left|P_n(z)\right|\le c_{11}\left|\frac{B_{m,R}(z)}{B_{m,R}(z_1)}\right|\left|P_n(z_1)\right|+c_{12}\left\|P_n\right\|_{L_p}\cdot\left(J_{n,2}\right)^{1/p} \tag{4.12}$$

elde ederiz. ,Her $\zeta\in\Gamma_R$ için $\left|B_{m,\mathrm{R}}(\zeta)\right|=1$ olduğundan $z\in\Gamma$ için öyle bir ε_1 , $0<\varepsilon_1<\frac{1}{n}$ sayısı bulunur ki,

$$\left|B_{m,R}(z_1)\right|>1-\varepsilon_1 \tag{4.13}$$

sağlansın

O zaman (4.12) ve (4.13) her $z\in\Gamma\setminus\{z_1\}$ için yazabiliriz:

$$\left|P_n(z)\right|\le c_{13}\left|P_n(z_1)\right|+c_{12}\left\|P_n\right\|_{L_p}\cdot\left(J_{n,2}\right)^{1/p}\quad p>0 \tag{4.14}$$

Buradaki $\left|P_n(z_1)\right|$ nin değerlendirilmesini (2.3) ten biliyoruz. Son olarak

$$J_{n,2}=\int_{\Gamma_R}\frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma}}{\left|\zeta-z\right|^2\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right| \tag{4.15}$$

integralının değerlendirilmesini elde etmek gerekir. Şimdi bunu gerçekleştirelim. Teoremim koşuluna gore, $0<\nu_1<1,\ 0<\alpha\le 1\ \textit{için}\ \Gamma\in\tilde{Q}_a\left[\nu_1\right]$ dir. O halde $\varphi\in Lip\nu_1$ ve [22]’ye gore öyle bir $\delta_1, 0<\delta_1<\delta_0<diam\,\bar{G}$ sayısı vardır ki,

$$\Phi\in Lip\frac{1}{2-\nu_1},\ \ z\in\overline{\Omega(z_1\ \delta)}. \tag{4.16}$$

sağlanıyor. Aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim:

$$\begin{gathered}\Gamma_{R,1}^1:=\Gamma_R^1\cap\Omega(z_1,\delta_1),\quad \Gamma_{R,2}^1:=\Gamma_R\setminus\Gamma_{R,1}^1;\ F_{R,i}^1:=\Phi\left(L_{R,i}^1\right)\\ F_{R,i}^{1,1}:=\left\{\tau\in F_{R,i}^1:\left|\tau-\omega_1\right|\ge\left|\tau-\omega\right|\right\},F_{R,i}^{1,2}:=F_{R,i}^1\setminus F_{R,i}^{1,1}\\ \Gamma_1^1:=\Gamma^1\cap B(z_1,\delta_1),\ \Gamma_2^1:=\Gamma^1\setminus\Gamma_1^1;\ F_i^1:=\Phi\left(\Gamma_i^1\right),\ i=1,2\end{gathered} \tag{4.17}$$

Bu işaretlemeleri dahil ettikten sonra, (4.9) –u

$$J_{n,2}=J_{n,2}\left(\Gamma_{R,1}^1\right)+J_{n,2}\left(\Gamma_{R,2}^1\right) \tag{4.18}$$

şeklinde yazabiliriz, neredeki her $l \subset \Gamma$ için

$$J_{n,2}(l) := \int_l \frac{|z - z_1|^{2-2\sigma_1}}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} |d\zeta| \tag{4.19}$$

dır. Burada iki mümkün durum vardır: z_1 noktası Γ^1 veya Γ^2 üzerinde olabilir. Eğer $z \in \Gamma_i^1$ ise, o zaman $\omega \in F_i^1$ $i = 1, 2$ dir. Buradaki iki duruma ayrı ayrılıkta bakacağız. Her durum da kendiliğinden alt durumları içeriyor.

1. Önce $z \in \Gamma_1^1$ olsun.

1.1. (4.11)'den yararlanarak

$$\begin{aligned} J_{n,2}\left(\Gamma_{R,1}^1\right) &= \int_{\Gamma_{R,1}^1} \frac{|z - z_1|^{2-2\sigma_1}}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} |d\zeta| \preceq \int_{\Gamma_{R,1}^1} \frac{\left[|\zeta - z| + |\zeta - z_1|\right]^{2-2\sigma_1}}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} |d\zeta| = \\ &= \int_{\Gamma_{R,1}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{2\sigma_1} |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} + \int_{\Gamma_{R,1}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

sağlandışını görürüz. Yeniden

$$\begin{aligned} \Gamma_{R,j}^{1,1} &:= \left\{\zeta \in \Gamma_{R,j}^1 : |\zeta - z_1| \geq |\zeta - z|\right\}, \\ \Gamma_{R,j}^{1,2} &:= \Gamma_{R,j}^1 \setminus \Gamma_{R,j}^{1,1},\ F_{R,j}^{1,i} := \Phi\left(l_{R,j}^{1,i}\right),\ i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

olarak işaretleyelim. O halde (4.20)'den

$$\begin{aligned} J_{n,2}\left(\Gamma_{R,1}^1\right) &\preceq \int_{\Gamma_{R,2}^{1,1}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}} + \int_{\Gamma_{R,2}^{1,2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}} \\ &\preceq \int_{F_{R,2}^{1,1}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)|^{2\sigma_1+2+\gamma_1} \left(|\tau| - 1\right)} + \int_{F_{R,2}^{1,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)|^{2\sigma_1+2+\gamma_1} \left(|\tau - 1|\right)} \\ &\preceq n \int_{F_{R,1}^{1,1}} \frac{|d\tau|}{|\tau - \omega|^{\left(2\sigma_1+1+\gamma_1\right)\left(2-\nu_1\right)}} + n \int_{F_{R,1}^{1,2}} \frac{|d\tau|}{|\tau - \omega|^{\left(2\sigma_1+1+\gamma_1\right)\left(2-\nu_1\right)}} \preceq n^{\left(2\sigma_1+1+\gamma_1\right)\left(2-\nu_1\right)}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

buluruz.

1. Herhangi $\zeta \in \Gamma_{R,2}^1$ ve $z \in \Gamma_1^1$ için $|\zeta - z_1| \geq \delta_1$ dir. Buna göre, (4.11) ve (4.16)'dan :

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}\left(\Gamma^1_{R,2}\right) &\preceq \int\limits_{\Gamma^1_{R,2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{2\sigma_1}} \int\limits_{\Gamma^1_{R,2}} \frac{\left[|\zeta - z| + |\zeta - z_1|\right]^{2-2\sigma_1}}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} |d\zeta| = \\
&= \int\limits_{\Gamma^1_{R,2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{2\sigma_1} |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} + \int\limits_{\Gamma^1_{R,2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2\sigma_1+\gamma_1}} \\
&\le \frac{1}{\delta_1^{2+\gamma_1}} \int\limits_{\Gamma^1_{R,2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{2\sigma_1}} + \frac{1}{\delta_1^{2\sigma_1+\gamma_1}} \int\limits_{\Gamma^1_{R,2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \\
&\preceq \int\limits_{F^1_{R,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)\right|^{2\sigma_1} \left(|\tau| - 1\right)} + \int\limits_{F^1_{R,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)\right|^{2} \left(|\tau| - 1\right)}
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

elde ederiz:

Eğer $z \in \Gamma^1_1 \cap B\left(z_1, \frac{\delta}{2}\right)$ ise, o zaman $|\zeta - z| \ge |\zeta - z_1| - |z - z_1| \ge \delta_1 - \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1}{2}$ dır ve buna göre, (4.22)'den elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}\left(\Gamma^1_{R,2}\right) &\preceq n \int\limits_{F^1_{R,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)\right|^{2\sigma_1}} + n \int\limits_{F^1_{R,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)\right|^{2}} \\
&\le n \cdot \left(\frac{2}{\delta_1}\right)^{2\sigma_1 - 1} \int\limits_{F^1_{R,2}} |d\tau| + n \cdot \left(\frac{2}{\delta_1}\right) \int\limits_{F^1_{R,2}} |d\tau| \preceq n \cdot \left|F^1_{R,2}\right| \preceq n
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Eğer $z \in \Gamma^1_1 \setminus \overline{B\left(z_1, \frac{\delta_1}{2}\right)}$ ise, o zaman $\Phi \in Lip\alpha, z \in \overline{\Omega} \setminus \{z_1\}$ olduğundan $|\zeta - z| \ge |\tau - \omega|^{\frac{1}{\alpha}}$, ve buna göre (4.22)'den

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}\left(\Gamma^1_{R,2}\right) &\preceq n \int\limits_{F^1_{R,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)\right|^{2\sigma_1}} + n \int\limits_{F^1_{R,2}} \frac{d\left(\Psi(\tau), \Gamma\right)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)\right|^{2}} \\
&\preceq n \int\limits_{F^1_{R,1}} \frac{|d\tau|}{|\tau - \omega|^{\frac{2\sigma_1 - 1}{\alpha}}} + n \int\limits_{F^1_{R,1}} \frac{|d\tau|}{|\tau - \omega|^{\frac{1}{\alpha}}} \preceq n^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

sağlandışını buluruz.

2. Şimdi $z \in \Gamma^1_2$ olsun.

2.1 $|\zeta - z_1| < |z - z_1|$ ye göre, (4.16)'dan elde ederiz:

$$J_{n,2}\left(\Gamma_{R,1}^{1}\right)=\int\limits_{\Gamma_{R,1}^{1}}\frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right|\preceq\int\limits_{\Gamma_{R,1}^{1}}\frac{\left[\left|\zeta-z\right|+\left|\zeta-z_1\right|\right]^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right|$$

$$=\int\limits_{\Gamma_{R,1}^{1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2\sigma_1}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}+\int\limits_{\Gamma_{R,1}^{1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2\sigma_1+\gamma_1}}$$

$$\preceq\int\limits_{\Gamma_{R,1}^{1,1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{\Gamma_{R,1}^{1,2}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z_1\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}$$

$$\preceq\int\limits_{F_{R,2}^{1,1}}\frac{d\left(\Psi\left(\tau\right),\Gamma\right)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi\left(\tau\right)-\Psi\left(\omega\right)\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}\left(\left|\tau\right|-1\right)}+\int\limits_{F_{R,2}^{1,2}}\frac{d\left(\Psi\left(\tau\right),\Gamma\right)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi\left(\tau\right)-\Psi\left(\omega_1\right)\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}\left(\left|\tau\right|-1\right)}$$

$$\preceq n\int\limits_{F_{R,1}^{1,1}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-\omega\right|^{\frac{(2\sigma_1+1+\gamma_1)}{\alpha}}}+n\int\limits_{F_{R,1}^{1,2}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-\omega_1\right|^{(2\sigma_1+1+\gamma_1)(2-\nu_1)}}\preceq n^{(2\sigma_1+1+\gamma_1)(2-\nu_1)}.$$

Bu nedenle,

$$J_{n,2}\left(\Gamma_{R,1}^{1}\right)\preceq n^{(2\sigma_1+1+\gamma_1)(2-\nu_1)} \tag{4.25}$$

Her $\zeta\in\Gamma_{R,2}^{1}$ ve $z\in\Gamma_{2}^{1}$ için, $\left|\zeta-z_1\right|\geq\delta_1$ dır. 1.2)'ye benzer şekilde biz:

$$J_{n,2}\left(\Gamma_{R,2}^{1}\right)=\int\limits_{\Gamma_{R,2}^{1}}\frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right|\preceq\frac{\left(diam\,\Gamma\right)^{2-2\sigma_1}}{\left(\delta_1\right)^{2+\gamma_1}}\int\limits_{\Gamma_{R,2}^{1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2}}$$

$$\preceq\int\limits_{F_{R,2}^{1}}\frac{d\left(\Psi\left(\tau\right),\Gamma\right)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi\left(\tau\right)-\Psi\left(\omega\right)\right|^{2}\left(\left|\tau\right|-1\right)}\preceq n\int\limits_{F_{R,2}^{1,1}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi\left(\tau\right)-\Psi\left(\omega\right)\right|}$$

$$\preceq n\int\limits_{F_{R,2}^{1}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-\omega\right|^{\frac{1}{\alpha}}}\preceq n^{\frac{1}{\alpha}}$$

elde ederiz. (4.12), (4.14)- (4.26) değerlendirmelerin birleştirerek, sonunda

$$\left|P_n\left(z\right)\right|\leq c_{13}\left|P_n\left(z_1\right)\right|+c_{12}\left\|P_n\right\|_{L_p}\cdot n^{\frac{1}{\alpha p}},\ p>0$$

elde ederiz. Teorem 4.1'in ispatı tamamlandı.

Teorem 4.4 *$p>0$ ve keyfi tespit edilmiş bir ve $0<\lambda_1\leq 2$ için $\Gamma\in PC_{\theta}\left(\lambda_1\right)$ olsun; $h\left(z\right)$ (1.2) ile tanımlı olsun ve $z_1\in\Gamma$ noktasına uygun olarak*

$$\gamma_1 + 1 < \frac{1}{\lambda_1}$$

sağlansın. *O halde her* $P_n \in \wp_n$, $n \in N$ *ve keyfi küçük* $\varepsilon > 0$ *sayısı için aşağıdaki sağlanıyor:*

$$\left|P_n\left(z_1\right)\right| \le c_9\left(n+1\right)^{\frac{\gamma_1+1}{p}\tilde{\lambda}_1}\left\|P_n\right\|_{L_p(h,\Gamma)}$$

ve

$$\left|P_n\left(z\right)\right| \le c_9\left[\left(n+1\right)^{s_1} + \left|z-z_1\right|^{\sigma_1}\left(n+1\right)^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\right]\left\|P_n\right\|_{L_p(h,\Gamma)}, \; z \in \Gamma$$

burada

$$s_1 = \frac{1+\gamma_1}{p}\tilde{\lambda}_1, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1+\gamma_1}{2}$$

dır ve $c_9 = c_9\left(\Gamma, p, \gamma_1, \lambda_1, \varepsilon\right) > 0$, z ve n den bağımsız sabit ve

$$\tilde{\lambda}_1 := \begin{cases} \lambda_1 + \varepsilon, & eğer\, 0 < \lambda_1 < 2 \\ 2, & eğer\, \lambda_1 = 2 \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.5. *Teorem 4.4-ün koşulları dahilinde aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:*

$$\left|K_n\left(z_1\right)\right| \le c_9\left(n+1\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}\tilde{\lambda}_1}$$

ve

$$\left|K_n\left(z\right)\right| \le c_9\left[\left(n+1\right)^{s_1} + \left|z-z_1\right|^{\sigma_1}\left(n+1\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right]\left\|P_n\right\|_{L_p(h,\Gamma)}, \quad z \in \Gamma,$$

burada

$$s_1 = \frac{1+\gamma_1}{2}\tilde{\lambda}_1, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1+\gamma_1}{2}$$

dır.

Teorem 4.4'tün ispatı: Benzer şekilde Teorem 4.1'in başlangıçındaki (4.1) – (4.14) işlemleri ve işaretlemeleri kullanılarak

$$\left|P_n(z_1)\right| \preceq \left\|P_n\right\|_{L_p} \cdot I_{n,2}, \quad z \in \Gamma, \tag{4.26}$$

$$\left(I_{n,2}\right)^p = \int_{\Gamma_R} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} \tag{4.27}$$

olarak elde ederiz. $\delta := c_1 d_{1,R}$, ve $d_{1,R} := d\left(z_1, \Gamma_R^1\right)$, $\left|\Gamma_{R,i}^1\right| := mes\,\Gamma_{R,i}^1$, $i = 1,2$, kabul ederek ve (3.1) -i kullanarak, buradan yaza biliriz:

$$I_{n,2}^1 := \int_{\Gamma_R^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} = \int_{\Gamma_{R,1}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} + \int_{\Gamma_{R,2}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}},$$

öyleki,

$$\int_{\Gamma_{R,1}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} \preceq \int_{d_1 R}^{c_1 d_1, R} \frac{ds}{s^{2+\gamma_1}} \preceq \frac{1}{d_{1,R}^{1+\gamma_1}}$$

ve

$$\int_{\Gamma_{R,2}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} \preceq \int_{c_1 d_1, R}^{\left|\Gamma_{R,2}^1\right|} \frac{ds}{s^{2+\gamma_1}} \preceq \frac{1}{d_{1,R}^{1+\gamma_1}}$$

Bu değerlendirmelere göre, (4.26) ve (4.27) den yazabiliriz:

$$\left|P_n(z_1)\right| \preceq \frac{1}{d_{1,R}^{1+\gamma_1}} \left\|P_n\right\|_{L_p} \tag{4.28}$$

Diğer taraftan, her $0 < \lambda_1 < 2$ için, Lemma 3.5-e göre, düzgün eğriler için [11]

$$d_{1,R} \succeq \frac{1}{n^{\tilde{\lambda}_1}} \tag{4.29}$$

olduğunu yazabiliriz, burada keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için $\tilde{\lambda}_1 := \begin{cases} \lambda_1 + \varepsilon, & eğer\ 0 < \lambda_1 < 2 \\ 2, & eğer\ \quad \lambda_1 = 2 \end{cases}$ dır.

Şimdi (2.18)'i ispatlamayı başlayacağız. Teorem 2.1'in ispatının başlangıcındakine (4.1) -(4.14)- e benzer olarak yazabiliriz:

$$\left|P_n\left(z\right)\right| \leq c_{13}\left|P_n\left(z_1\right)\right| + c_{12}\left\|P_n\right\|_{L_p} \cdot \left(J_{n,2}\right)^{1/p}, \quad p>0,\ z\in\Gamma \tag{4.30}$$

burada

$$J_{n,2} = \int_{\Gamma_R} \frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta - z\right|^2 \left|\zeta - z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right| \tag{4.31}$$

Bu nedenle, Teoremin ispatının tamamlanması için (4.31) integralinin değerlendirilmesi yeterlidir. Bunun için aşağıdakileri dahil edelim:

$$\begin{aligned}
&l_{R,1}^1 := \Gamma_R^1 \cap \Omega\left(z_1, \eta_1 d_{1,R}\right), \quad \eta_1 > 1, \\
&l_{R,2}^1 := \Gamma_R^1 \cap \left(\Omega\left(z_1,\delta_1\right) \setminus \Omega\left(z_1,\eta_1 d_{1,R}\right)\right), \\
&l_{R,3}^1 := \Gamma_R^1 \setminus \left(l_{R,1}^1 \cup l_{R,2}^1\right);\ F_{R,j}^1 := \Phi\left(l_{R,j}^1\right), \\
&l_1^1 := \Gamma^1 \cap B\left(z_1,\eta_1 d_{1,R}\right),\ l_2^1 := \Gamma^1 \cap \left(B\left(z_1,\delta_1\right)\setminus B\left(z_1,\eta_1 d_{1,R}\right)\right), \\
&l_3^1 := \Gamma^1 \setminus \left(l_1^1 \cup l_2^1\right);\ F_j^1 := \Phi\left(l_j^1\right), \quad j=1,2,3
\end{aligned}$$

bu işaretlemeler yardımıyla

$$J_{n,2} = \sum_{j=1}^{3} \int_{l_{R,j}} \frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta - z\right|^2\left|\zeta - z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right| = \sum_{j=1}^{3} J_{n,2}\left(l_{R,j}^1\right),$$

olarak yazılabilir, burada

$$J_{n,2}\left(l_{R,j}^1\right) := \int_{l_{R,j}^1} \frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta - z\right|^2\left|\zeta - z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right|,\ j=1,2,3 \tag{4.32}$$

Daha sonra

$$\begin{aligned}
&l_{R,j}^{1,1} := \left\{\zeta \in l_{R,j}^1 : \left|\zeta - z_1\right| \geq \left|\zeta - z\right|\right\}, \\
&l_{R,j}^{1,2} := l_{R,j}^1 \setminus l_{R,j}^{1,1},\ F_{R,j}^{1,i} := \Phi\left(l_{R,j}^{1,i}\right),\ i=1,2, \quad j=1,2,3.
\end{aligned}$$

olsun. O zaman her $j=1,2,3$ için,(4.11)'e göre:

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}\left(l_{R,j}^{1}\right):=&\int\limits_{l_{R,j}^{1}}\frac{\left|z-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right|\le\int\limits_{l_{R,j}^{1}}\frac{\left|\zeta-z\right|+\left|\zeta-z_1\right|^{2-2\sigma_1}}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}\left|d\zeta\right|\\
\preceq&\int\limits_{l_{R,j}^{1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2\sigma_1}\left|\zeta-z_1\right|^{2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,j}^{1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2}\left|\zeta-z_1\right|^{2\sigma_1+\gamma_1}}\\
\preceq&\int\limits_{l_{R,j}^{1,1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,j}^{1,2}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z_1\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Yani, her $z\in\Gamma$, $i=1,2,\quad j=1,2,3$ için $J_{n,2}\left(l_{R,j}^{1,i}\right)$ integrallerini değerlendirmemiz gerekir. Burada iki mümkün durum var: z noktası Γ^1 veya Γ^2 üzerinde olabilir.

Birincisi $z\in\Gamma^1$ olsun. Eğer $z\in l_j^1$ ise, o zaman $j=1,2,3$ için $\omega\in F_j^1$ dir. Alt durumlara bakalım:

1. Önce $z\in l_1^1$ olsun. Lemma 3.5'e göre (4.33)' ten yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}\left(l_{R,1}^{1}\cup l_{R,2}^{1}\right)\preceq&\int\limits_{l_{R,1}^{1,1}\cup l_{R,2}^{1,1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,1}^{1,2}\cup l_{R,2}^{1,2}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z_1\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}\\
=&\int\limits_{l_{R,1}^{1,1}\cup l_{R,2}^{1,1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{l_{R,1}^{1,2}\cup l_{R,2}^{1,2}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z_1\right|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}\\
\preceq&\int\limits_{d\left(z,l_{R,1}^{1}\right)}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{d_1,R}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}\preceq\frac{1}{d^{\frac{1}{\lambda_1}}\left(z,l_{R,1}^{1}\right)}+\frac{1}{d_{1,R}^{\frac{1}{\lambda_1}}}\preceq n^{1+\varepsilon};
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}\left(l_{R,3}^{1}\right)\preceq&\int\limits_{l_{R,3}^{1,1}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,3}^{1,2}}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta-z_1\right|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}\\
\preceq&\frac{1}{\left(\delta_1-c_1d_{1,R}\right)^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}\int\limits_{l_{R,3}^{1,1}}\left|d\zeta\right|+\frac{1}{\delta_1^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}\int\limits_{l_{R,3}^{1,2}}\left|d\zeta\right|\preceq\left|l_{R,3}^{1}\right|\preceq 1.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

2. Farz edelim ki, $z\in l_2^1$ olsun. Bu durumda buluruz:

$$J_{n,2}\left(l_{R,1}^{1}\cup l_{R,2}^{1}\right)\preceq \int\limits_{l_{R,1}^{1,1}\cup l_{R,2}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,1}^{1,2}\cup l_{R,2}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}$$

$$=\int\limits_{l_{R,1}^{1,1}\cup l_{R,2}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{l_{R,1}^{1,2}\cup l_{R,2}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}} \tag{4.36}$$

$$\preceq \int\limits_{d\left(z,l_{R,1}^{1}\right)}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{d_{1,R}}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}\preceq\frac{1}{d^{\frac{1}{\lambda_1}}\left(z,l_{R,1}^{1}\right)}+\frac{1}{d_{1,R}^{\frac{1}{\lambda_1}}}\preceq n^{1+\varepsilon},$$

ve

$$J_{n,2}\left(l_{R,3}^{1}\right)\preceq \int\limits_{l_{R,3}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,3}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}$$

$$\int\limits_{d\left(z,l_{R,1}^{1}\right)}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\frac{1}{\delta_1^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}\int\limits_{l_{R,3}^{1,2}}|d\zeta| \tag{4.37}$$

$$\preceq\frac{1}{d^{\frac{1}{\lambda_1}}\left(z,l_{R,1}^{1}\right)}+\left|l_{R,3}^{1}\right|\preceq n^{1+\varepsilon}.$$

3. Farz edelim ki $z\in l_3^1$ olsun. Burada, Lemma 3.5'ten yararlanarak

$$J_{n,2}\left(l_{R,1}^{1}\right)\preceq \int\limits_{l_{R,1}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,1}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}$$

$$=\int\limits_{l_{R,1}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{l_{R,1}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}} \tag{4.38}$$

$$\preceq\frac{1}{\left(\delta_1-c_1d_{1,\mathrm{R}}\right)^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}\int\limits_{l_{R,1}^{1,1}}|d\zeta|+\int\limits_{d_{1,R}}^{c_1d_{1,R}}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}\preceq\frac{1}{d_{1,R}^{\frac{1}{\lambda_1}}}\preceq n^{1+\varepsilon}$$

$$J_{n,2}\left(l_{R,2}^{1}\right)\preceq \int\limits_{l_{R,2}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}+\int\limits_{l_{R,2}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{2\sigma_1+2+\gamma_1}}$$

$$=\int\limits_{l_{R,2}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{l_{R,2}^{1,2}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_1|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}\preceq\int\limits_{l_{R,2}^{1,1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tilde{z}|^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{d_{1,R}}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}} \tag{4.39}$$

$$\preceq\int\limits_{d\left(\tilde{z},l_{R,2}^{1}\right)}^{c_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}+\int\limits_{d_{1,R}}^{\delta_1}\frac{ds}{s^{\frac{1}{\lambda_1}+1}}\preceq\frac{1}{d^{\frac{1}{\lambda_1}}\left(\tilde{z},l_{R,2}^{1}\right)}+\frac{1}{d_{1,R}^{\frac{1}{\lambda_1}}}\preceq n^{1+\varepsilon},$$

ve $\tilde{z} \in l_2^1$ tespit edilmiş bir nokta ve her $\zeta \in l_{R,2}^{1,1}$ için $|\zeta - z| \succeq |\zeta - \tilde{z}|$ sağlandığını dikkate alırsak

$$\begin{aligned} J_{n,2}\left(l_{R,3}^1\right) &\preceq \int\limits_{l_{R,3}^1} \frac{|z-z_1|^{2-2\sigma_1}}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z_1|^{2+\gamma_1}} |d\zeta| \\ &\leq \frac{(diam\,\Gamma)}{\delta_1^{2+\gamma_1}} \int\limits_{l_{R,3}^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \preceq \int\limits_{d\left(z,l_{R,3}^1\right)}^{c_1} \frac{ds}{s^2} \preceq \frac{1}{d\left(z, l_{R,3}^1\right)} \preceq n^{1+\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde ededIz. (4.31)- (4.40) değerlendirmelerin birleştirerek,

$$J_{n,2} \preceq n^{1+\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0 \tag{4.41}$$

elde ederiz. (4.28), (4.29), (4.30) ve (4.41) değerlendirmelerinden teoremin tam ispatını elde etmiş oluruz.

Teorem 4.6. *$p > 0$ ve herhangi bir $0 < \lambda_1 \leq 2,$ için $\Gamma \in PDS(\lambda_1)$ olsun $h(z)$ (1.2) ile tanımlansın. O halde her $P_n, n \in N$ için aşağıdaki doğrudur:*

$$|P_n(z_1)| \leq c_{10}(n+1)^{\frac{\gamma_1+1}{pa}\lambda_1} \|P_n\|_{L_p(h,\Gamma)} \tag{4.42}$$

ve eğer

$$\gamma_1 + 1 < \frac{1}{\lambda_1} \tag{4.43}$$

ise

$$|P_n(z)| \leq c_{10}\left[(n+1)^{s_1} + |z - z_1|^{\sigma_1}(n+1)^{\frac{1}{pa}}\right] \|P_n\|_{L_p(h,\Gamma)}, \ z \in \Gamma \tag{4.44}$$

dır, burada $c_{10} = c_{10}(\Gamma, p, \gamma_i) > 0$ *n ve z den bağımsiz* sabitler ve

$$s_1 = \frac{1+\gamma_1}{p}\lambda_1, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1+\gamma_1}{2} \tag{4.45}$$

dır.

Sonuç 4.7. *Teorem 4.6 nın koşulları dahilinde aşağıdaki doğrudur,*

$$\left|K_n\left(z_1\right)\right| \le c_{10}\left(n+1\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}\tilde{\lambda}} \tag{4.47}$$

ve eğer

$$\gamma_i + 1 < \frac{1}{\lambda_1} \tag{4.48}$$

ise

$$\left|K_n\left(z\right)\right| \le c_{10}\left[\left(n+1\right)^{s_1} + \left|z-z_1\right|^{\sigma_1}\sqrt{n+1}\right], \quad z\in\Gamma, \tag{4.49}$$

burada s_1 ($p=2$ için) ve σ_1 (4.45) *ten bulunur.*

Uyarı 4.8. $n\in\mathbb{N}$ sayısı için öyle bir $P_n^* \in \wp_n$ polinomunu, h^* ağırlık fonksiyonu ve $c_{10}=c_{10}\left(\Gamma\right)>0$ sabitteri vardırki, $\Gamma:=\left\{z:\left|z\right|=1\right\}$ için,

$$\left\|P_n^*\right\|_{L_\infty} \ge c_{10}\left(n+1\right)^{\frac{1}{p}}\left\|P_n^*\right\|_{L_p\left(h^*,\Gamma\right)}.$$

Uyarı 4.8'in ispatı: a) $\Gamma:=\left\{z:\left|z\right|=1\right\}, h^*\left(z\right)\equiv 1$ ve $P_n^*\left(z\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(j+1\right)z^j$ olsun. O zaman $\Gamma\in\tilde{Q}_1$;

$$\left|P_n^*\left(z\right)\right| \le \sum_{j=0}^{n}\left|\left(j+1\right)z^j\right| = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}, \left|z\right|=1.$$

Diğer yandan,

$$\left|P_n^*\left(1\right)\right| = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}$$

bu yüzden,

$$\left\|P_n^*\right\|_{L_\infty} = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}; \quad \left\|P_n^*\right\|_{L_2\left(1,\Gamma\right)} = \sqrt{\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+3\right)}{3}\pi}.$$

o zaman,

$$\left\|P_n^*\right\|_{L_\infty}=\sqrt{\frac{3(n+1)(n+2)}{4\pi(2n+3)}}\left\|P_n^*\right\|_{L_2(1,\Gamma)}\geq\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{n}\left\|P_n^*\right\|_{L_2(1,\Gamma)}$$

dir.

Sonuc 4.7'nin ispatı: Eğer $\Gamma\in C(1,\alpha,\omega_1)$, $1\leq\omega_1<2$ ise, o zaman $\Gamma=\partial G$ eğrisindeki iç açı $\left(\bar{G}'ye\ göre\right)$ z_1 - $(2-\omega_1)$ dir. Uyarı 3.1'e göre $\alpha=1$ için burada $\Gamma\in\tilde{Q}_a\left[\frac{1}{2-\omega_1}\right]$ dir. Buradan $\psi\in Lip(2-\omega_1)$ [27], yani $\Phi\in Lip\frac{1}{\omega_1}$ [37] dir. Ortonormallık özelliğinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.9. *$p>0$ ve her bir $f_i(x)=c_i x^{1+\alpha_i}$, $\alpha_i\geq 0$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $g_i(x)=c_i x^{1+\beta_i}$, $\beta_i>0$, $i=\overline{m_1+1,m}$ ailesi için $G\in AC(f_i,g_j)$ olsun; $h(z)$ (1.2) ile tanımlı olsun. O halde , her K_n, $n\in\mathbb{N}$, $\gamma_i>-1$, $i=\overline{1,\mathrm{m}}$ ve $c_1=c_1(\mathrm{G},p,\varepsilon,\gamma_i,\beta_i)>0$ sayısı için aşağıdaki doğrudur:*

$$\left\|K_n\right\|_\infty\leq c_1\left(\sum_{i=1}^{m_1}n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)(1+\tilde{\varepsilon})}{p}}+\sum_{i=m_1+1}^{m}n^{\left(\frac{\tilde{\gamma}_i}{1+\beta_i}+1\right)\frac{1}{p}+\varepsilon}\right),\tag{4.50}$$

burada $\tilde{\varepsilon}:=\begin{cases}\varepsilon, & eğer\ \alpha_1=0,\\ 1, & eğer\ \alpha_1\neq 0,\end{cases}$ $\forall\,\varepsilon>0$, $\tilde{\gamma}_i=\max\{0;\gamma_i\}$, $i=\overline{1,m}$, dır.

Şimdi yazılımları kolaylaştırmak için $i=1,2;$ $\mathrm{m}=1,$ $m=2,$ olarak ele alalım ve varsayalım ki, G bölgemiz z_1 *noktsinde* " f_1-dokunma", $f_1(x)=c_1x^{1+\alpha_1}$, $\alpha_1\geq 0,$ ile iç sıfır açıya sahip olsun ve z_2 noktasında ise " g_2 -dokunma" , $g_2(x)=C_2x^{1+\beta_2}$, $\beta_2>0,$ ile dış sıfır açıya sahip olsun. Buradaki $-\infty<c_i<+\infty,$ $c_i=c_i\left(c_{i1}^i,c_{i2}^i\right)$ $i=1,2,$ sabit sayılar sözügeden sınıfın tanımındaki sayılarıdır. Bu durumda aşağıdakini elde ederiz:

Teorem 4.10. *$p>0$ ve $f_1(x)=c_1x^{1+\alpha_1}$, $\alpha_1\geq 0,$ ve $g_2(x)=c_2x^{1+\beta_2}$, $\beta_2>0$ için $G\in AC(f_1,g_2)$ olsun; $h(\mathrm{z})$ (1.2) ile tanımlı olsun. O halde , her K_n, $n\in\mathbb{N}$, $\gamma_i>-1$, $i=1,2,$ ve $c_2=c_2(\mathrm{G},p,\varepsilon,\beta_2)>0$ sayısı için aşağıdaki doğrudur:*

$$\|K_n\|_\infty \le c_2 \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1+2}{p}}, & \gamma_1 > \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2} - 1,\ \gamma_2 > 1+\beta_2; \\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1}{p}+\varepsilon}, & 0 < \gamma_1 \le \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2} - 1,\ \gamma_2 > 1+\beta_2;, \\ n^{\frac{\tilde{\gamma}_1+2}{p}}, & \gamma_1 > -1,\ \ -1 < \gamma_2 < 1+\beta_2, \end{cases} \quad (4.51)$$

Eğer G bölgesi z_2 noktasında yalnız bir tane dış sıfır açıya sahip ise aşağıdaki elde edilir:

Teorem 4.11. *$p > 0$ ve $g_2(x) = C_2 x^{1+\beta_2}$, $\beta_2 > 0$ için $G \in AC(0, g_2)$ olsun; $h(z)$ (1.2) ile tanımlı olsun. O halde, her K_n, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i > -1$, $i = 1,2,$ ve $c_3 = c_3(\mathrm{G}, p, \varepsilon, \gamma_i, \beta_2) > 0$ sayısı için aşağıdaki doğrudur:*

$$\|K_n\|_\infty \le c_3 \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1+2}{p}}, & \gamma_1 > \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2},\ \gamma_2 > 0; \\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1}{p}+\varepsilon}, & 0 < \gamma_1 \le \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2},\ \gamma_2 > 0;, \\ n^{\frac{\tilde{\gamma}_1+2}{p}}, & -1 < \gamma_1, \gamma_2 \le 0, \end{cases}$$

Teorem 4.9- 4.11'in ispatları:

$f_i(x) = c_i x^{1+\alpha_i}, \alpha_i \ge 0, i = \overline{1, m_1}$ *ve* $g_i(x) = c_i x^{1+\beta_i}, \beta_i \ge 0, i = \overline{m_1+1, m}$ için $G \in AC(f_i, g_i)$ olsun.

Her $R > 1$ için, $\omega = \varphi_R(z)$ ile G_R'yi B'ye conform ve yalınkat resmeden dönüşümü gösterelim öyle ki, $\varphi_R(0) = 0,\ \varphi_R' > 0$ koşulları sağlansın. $\{\zeta_j\}$, $1 \le j \le m \le n$, ile $K_n(z)$ nin G_R nin içinde kalan sıfırlarını işaretleyelim.

$$B_{m,\mathrm{R}}(z) := \prod_{j=1}^{m} b_{j,R(z)} = \prod_{j=1}^{m} \frac{\varphi_R(z) - \varphi_R(\zeta_i)}{1 - \overline{\varphi_R(\zeta_i)}\varphi_R(z)}$$

(4.52)

ile $\{\zeta_j\}$, $1 \le j \le m \le n$ $K_n(z)$ nin sıfırlara göre Blaschke çarpımını işaretleyelim.

Şimdi

$$Q_n(z) := \left[\frac{K_n(z)}{B_{m,R}(z)}\right]^{p/2}$$

olarak tanımlayalım. $Q_n(z)$ fonksiyonu G_R de analitik $\bar{G}_R$ de sürekli ve G_R 'de sıfırları yoktur. $Q_n(z)$ nin keyfi sürekli dalını alabiliriz. Bu dal için, aynı şimgeyi sürdürüyoruz. Sonra G_R de $Q_n(z)$ nin Cauchy integral förmülünü yazalım:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} Q_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G_R$$

veya değerlendirmeye geçerek yazabiliriz:

$$\left| \left[\frac{K_n(z)}{B_{m,R}(z)}\right]^{p/2} \right| \le \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \left| \frac{K_n(\zeta)}{B_{m,R}(\zeta)} \right|^{p/2} \frac{d\zeta}{|\zeta - z|} \le \int_{\Gamma_R} |K_n(\zeta)|^{p/2} \frac{d\zeta}{|\zeta - z|}.$$

Tanımdan da aşikardır ki, $\zeta \in \Gamma_R$ ler için $|B_{m,R}(\zeta)| = 1$ dır. $z \in \Gamma$ olsun. İntegral altı ifadenin pay ve paydayı $h^{1/2}(\varsigma)$ ile çarparak ve Hölder eşitsizliğini kullanarak aşağıdakini elde ederiz:

$$\left| \frac{K_n(z)}{B_{m,R}(z)} \right|^{p/2} \le \frac{1}{2\pi} \left(\int_{L_R} h(\zeta) |K_n(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{1/2} \times \left(\int_{L_R} \frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m} |\zeta - z_j|^{\gamma_j} |\zeta - z|^2} \right)^{1/2}$$

$$=: \frac{1}{2\pi} J_{n,1} \times J_{n,2}, \tag{4.53}$$

burada

$$J_{n,1} := \left(\int_{\Gamma_R} h(\zeta) \left| K_n(\zeta) \right|^p |d\zeta| \right)^{1/p}, \qquad J_{n,2} := \left(\int_{\Gamma_R} \frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m} \left| \zeta - z_j \right|^{\gamma_j} \left| \zeta - z \right|^2} \right)^{1/2}$$

olarak işaretlenmiştir. O zaman $\left| B_{m,R}(z) \right| < 1,\ z \in \Gamma$ için Lemma 3.4 ten, biz

$$\left| K_n(z) \right| \preceq \left(J_{n,1} \cdot J_{n,2} \right)^{2/p} \preceq J_{n,2}^{2/p} \quad z \in \Gamma \tag{4.54}$$

elde ederiz. Buradan görülür ki, ispat için $J_{n,2}$ nin değerlendirilmesi elde edilmelidir. Bunun için aşağıdaki işaretlemeleri dahil edelim:

$$\omega_J := \Phi\left(z_j\right),\ \ \varphi_j := \arg \omega_j,\ L_R^j := L_R \cap \overline{\Omega}^j,\ j = \overline{1,m},$$

burada $\Omega^j := \Psi\left(\Delta_j'\right)$;

$$\Delta_1' = \left\{ t = \mathrm{Re}^{i\theta} :\ R > 1,\ \frac{\varphi_m + \varphi_1}{2} \le \theta < \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right\},$$
$$\Delta_m' = \left\{ t = \mathrm{Re}^{i\theta} :\ R > 1,\ \frac{\varphi_{m-1} + \varphi_m}{2} \le \theta < \frac{\varphi_m + \varphi_1}{2} \right\},$$

ve her $j = \overline{2, m-1}$ için

$$\Delta_j' = \left\{ t = \mathrm{Re}^{i\theta} :\ R > 1,\ \frac{\varphi_{j-1} + \varphi_j}{2} \le \theta < \frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2} \right\}$$

dır. Bu işaretlemelerden sonar biz aşağıdaki sayı için üsten değerlendirme bulmalıyız:

$$J_{n,2}^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_R^i} \frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m} \left| \zeta - z_j \right|^{\gamma_j} \left| \zeta - z \right|^2} \approx \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_R^i} \frac{|d\zeta|}{\left| \zeta - z_i \right|^{\gamma_i} \left| \zeta - z \right|^2} =: \sum_{i=1}^{m} J_{n,2}^i, \tag{4.55}$$

burada

$$J_{n,2}^i = \int_{L_R} \frac{|d\zeta|}{\left| \zeta - z_i \right|^{\gamma_i} \left| \zeta - z \right|^2}, \quad i = \overline{1,m} \tag{4.56}$$

$\{z_j\}_{j=1}^{m} \in \Gamma$ noktaları biri birinden farklı olduğundan, her $i=\overline{1,m}$ için $J_{n,2}^{i}$ integralı değerlendirilmelidir.

Bir sonraki hesaplarımızın basitliği için,

$$i=1,2;\, m_1=1, m=2;\, z_1=-1;(-1;1)\subset G;\, R=1+\frac{\varepsilon_0}{n} \tag{4.57}$$

ve Tanım 2.23 ve 2.24'deki OX ve OY local koordinat eksenlerini OXY sisteminde koordinat eksenlerine paralel olarak ele alacağız.

$\Gamma=\Gamma^{+}\cup\Gamma^{-}:\ \Gamma^{+}:=\{z\in\Gamma:\operatorname{Im}z\geq 0\}, \Gamma^{-}:=\{z\in\Gamma:\operatorname{Im}z<0\}$,

$\omega^{\pm}:=\left\{\omega=e^{i\theta}:\theta=\frac{\varphi_1\pm\varphi_2}{2}\right\};\ z^{\pm}\in\Psi(\omega^{\pm});\ \Gamma^{i}\ z^{+},z_i,z^{-}\in\Gamma^{-}$ noktaların birleştiren yay olsun; $\Gamma^{i,\pm}:=\Gamma^{i}\cap\Gamma^{\pm},\ i=1,2,\ z_0, L^{+}$ $(veya\ \Gamma^{-}\ seçilen\ yöne\ göre)$ üzerinde keyfi tespit edilmiş bir noktadır. Geneliği kaybetmeden, basitlik için biz $z_0=z^{+}$ $(z_0=z^{-})$ alacağız.

Önceki notasyanlara benzer şekilde, aşağıdakileri da dahil edelim:

$\Gamma_R=\Gamma_R^{+}\Gamma L_R^{-}$ *burada* $\Gamma_R^{+}:=\{z\in\Gamma_R:\operatorname{Im}z\geq 0\}$,

$\Gamma_R^{-}:=\{z\in\Gamma_R:\operatorname{Im}z<0\},\ \omega_R^{\pm}:=\left\{\omega=e^{i\theta}:\theta=\frac{\varphi_1\pm\varphi_2}{2}\right\};\ d\left(z_{2,R},\Gamma^{2}\cap\Gamma^{\pm}\right)=d\left(z_{2,R},\Gamma^{\pm}\right);$

$z_R^{\pm}\in\Psi(\omega_R^{\pm})\ z_{i,R}\in\Gamma_R$ olsun, öyle ki $d_{i,R}=|z_i-z_{i,R}|\ ve\ \zeta^{\pm}\in\Gamma^{\pm}$;

$z_i^{\pm}:=\left\{\zeta\in\Gamma^{i}:|\zeta-z_i|=c_i d(z_i,\Gamma_R)\right\},\quad z_{i,R}^{\pm}:=\left\{\zeta\in\Gamma_R^{i}:|\zeta-z_{i,R}|=c_i d(z_{i,R},\Gamma_R)\right\}$

$\omega_R^{\pm}\in\Phi(z_{i,R}^{\pm})dir.\ \Gamma_R^{i},\ i=1,2,\quad z_R^{+},z_{i,R},z_R^{-}\in\Gamma_R,\ \Gamma_R^{i\pm}:=\Gamma_R^{i}\cap\Gamma_R^{\pm}\ ve\ \ l_R^{i\pm}\left(z_{i,R}^{\pm},z_{,R}^{\pm}\right)$

noktaları birleştirerek yayları gösteriyoruz, birleşme noktalar $z_{i,R}^{\pm}\ ile\ z_{,R}^{\pm}$ sırasıyla oluyor ve $i=1,2,\ \left|l_{i,R}^{\pm}\right|:=mes\, l_{i,R}^{\pm}\left(z_{i,R}^{\pm},z_{,R}^{\pm}\right)$ dir. Daha sonra $l_{R,j}^{1,1}:=\left\{\zeta\in l_{R,j}^{1}:|\zeta-z_1|\geq|\zeta-z|\right\}$,

$l_{R,j}^{1,2}:=l_{R,j}^{1}\setminus l_{R,j}^{1,1},\ F_{R,j}^{1,i}:=\Phi\left(l_{R,j}^{1,i}\right),\ i=1,2,\ \ j=1,2,3,$ işaretleriz. Son olarak

$$S_{1,R}^{i,\pm} := \left\{\zeta \in \Gamma_R^{i,\pm} : |\zeta - z_i| < c_i d_{i,R}\right\};$$
$$S_{2,R}^{i,\pm} := \left\{\zeta \in \Gamma_R^{i,\pm} : \mathrm{c}_i\, d_{i,R} \le |\zeta - z_i| \le \left|l_{\mathrm{i},R}^{i,\pm}\right|\right\}, F_{\mathrm{i},R}^{i,\pm} = \Phi\left(S_{\mathrm{j},R}^{i,\pm}\right);$$
$$S_1^{i,\pm} := \left\{\zeta \in \Gamma^{i,\pm} : |\zeta - z_i| < c_i d_{i,R}\right\};$$
$$S_2^{i,\pm} := \left\{\zeta \in \Gamma^{i,\pm} : \mathrm{c}_i\, d_{i,R} \le |\zeta - z_i| \le \left|l_{\mathrm{i},R}^{i,\pm}\right|\right\}, F_{\mathrm{i}}^{i,\pm} = \Phi\left(S_{\mathrm{j}}^{i,\pm}\right); \quad i, \mathrm{j} = 1, 2$$

olarak gösterelim. Bunları dikkate alarak ve $\tau = \Phi(\zeta)$ değişkeni değiştirerek (3.1) ve (4.56)'ten elde ederiz;

$$J_{n,2}^{i} \approx \sum_{i,j=1}^{2} \int_{F_{j,R}^{i,+} \cup F_{j,R}^{i,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(\omega_i)|^{\gamma_i} \left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega')\right|^2} \approx$$
$$\approx \sum_{i,j=1}^{2} \int_{F_{j,R}^{i,+} \cup F_{j,R}^{i,-}} \frac{d(\Psi(\tau), \Gamma)|d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(\omega)|^{\gamma_i} \left|\Psi(\tau) - \Psi(\omega')\right|^2 (|\tau| - 1)}$$
$$\approx \sum_{i,j=1}^{2} \left[J\left(F_{j,R}^{i,+}\right) + J\left(F_{j,R}^{i,-}\right) \right] \tag{4.58}$$

Bize gerek olan $J\left(F_{j,R}^{i,+}\right)$ ve $J\left(F_{j,R}^{i,-}\right)$ integrallerini değerlendirmemiz gerekmektedir. Bunun için şu şekilde devam edeceğiz: diyelim ki,

$$\|K_n\|_\infty =: |K_n(z')|, \; z' \in \Gamma \;, \tag{4.59}$$

sağlandığı noktalarden biri olsun. $\omega' := \Phi(z')$ olarak gösterelim. Burada iki mümkün durum var z' noktası Γ^1 veya Γ^2 üzerindedir.

1. Önce varsayalım ki, $z' \in \Gamma^1$.

Özel durumları inceleyelim:

1.1 Eğer $z' \in S_1^{1,\pm}$ ise o zaman $\omega' \in F_i^{1,\pm}$ ve her $\gamma_1 > 0$ için

$$J\left(F_{1,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{1,-}\right)$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|;\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|\right\}\right]^{\gamma_1+1}} \quad (4.60)$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{\left|\tau-\omega_1\right|;\left|\tau-\omega^{'}\right|\right\}\right]^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})}}\leq n^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})}$$

ve her $-1<\gamma_1\leq 0$ için

$$J\left(F_{1,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{1,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|^{(-\gamma_1)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|}\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega^{'}\right|^{1+\tilde{\varepsilon}}}\leq n^{1+\tilde{\varepsilon}} \quad (4.61)$$

dır.

2. Eğer $z^{'}\in S_2^{1,\pm}$ ise o zaman her $\gamma_1>0$ için

$$J\left(F_{1,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{1,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|^{\gamma_1};\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{\left|\tau-\omega_1\right|;\left|\tau-\omega^{'}\right|\right\}\right]^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})}}\leq n^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})}$$
$$(4.62)$$

ve her $-1<\gamma_1\leq 0$ için

$$\underline{J\left(F_{1,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{1,-}\right)}\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|^{(-\gamma_1)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega^{'}\right|^{1+\tilde{\varepsilon}}}\leq n^{1+\tilde{\varepsilon}} \quad (4.63)$$

3. Eğer $z^{'}\in S_1^{1,\pm}$ ise o zaman her $\gamma_1>0$ için

$$J\left(F_{2,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{1,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|^{\gamma_1};\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\tau-\omega_1|;|\tau-\omega'|\right\}\right]^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})}}\leq n^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})} \tag{4.64}$$

ve her $-1<\gamma_1\leq 0$ için

$$J\left(F_{2,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{1,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|^{(-\gamma_1)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{|\tau-\omega'|^{1+\tilde{\varepsilon}}}\leq n^{1+\tilde{\varepsilon}} \tag{4.65}$$

dır.

4. Eğer $z'\in S_2^{1,\pm}$ ise o zaman her $\gamma_1>0$ için

$$J\left(F_{2,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{1,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_1)\right|^{\gamma_1};\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\tau-\omega_1|;|\tau-\omega'|\right\}\right]^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})}}\leq n^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})} \tag{4.66}$$

ve her $-1<\gamma_1\leq 0$ için

$$J\left(F_{2,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{1,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}\leq n^{1+\tilde{\varepsilon}} \tag{4.67}$$

dır.

O halde, (4.60) - (4.67) ilişkilerin birleştirerek, her $\gamma_1>0$ için:

$$\sum_{i=1}^{2}\left[J\left(F_{i,R}^{1,+}\right)+J\left(F_{i,R}^{1,-}\right)\right]\preceq n^{(\gamma_1+1)(1+\tilde{\varepsilon})} \tag{4.68}$$

ve her $-1<\gamma_1\le 0$ için

$$\sum_{i=1}^{2}\left[J\left(F_{\mathrm{i},R}^{1,+}\right)+J\left(F_{\mathrm{i},R}^{1,-}\right)\right]\preceq n^{(1+\tilde{\varepsilon})} \tag{4.69}$$

dır.

Bu nedenle, $z^{'}\in\Gamma^1$ durumu her $\gamma_1>-1$ için, (4.58), (4.68) ve (4.69)'den aşağıdakini elde ederiz:

$$J_{n,2}^1\preceq n^{(\tilde{\gamma}+1)(1+\tilde{\varepsilon})} \tag{4.70}$$

2. Şimdi varsayalım ki, $z^{'}\in L^2$ olsun. Eğer $z^{'}\in S_i^{2,\pm}$ ise, o zaman her $i=1,2\, için\ \omega^{'}\in F_i^{2,\pm}$ dir. (4.58)'deki $J_{n,2}^{i}$ değeri için özel durumları ele alacağız.

2.1 Eğer $z^{'}\in S_1^{2,\pm}$ ise, o zaman her $\gamma_2>-1$ için

$$\begin{aligned}J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{2,-}\right)\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma 2};\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|}\\+n\int\limits_{F_{1,R}^{2,-}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma 2};\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|}\end{aligned} \tag{4.71}$$

Sondaki iki integraller aynı şekilde değerlendirilir. Bunun için bunların birini değerlendiririz. $\tau\in F_{1,\mathrm{R}}^{2,+}$ için $\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|$'ten elde ederiz:

$$\begin{aligned}\left|\Psi(\tau)-\Psi\left(\omega^{'}\right)\right|&\succeq\max\left\{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|;\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|\right\}\\&=\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|\succeq\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{1}{1+\beta_2}}\end{aligned}$$

Buradan, $\gamma_2>0$ için

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)\preceq n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}}}\preceq\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\omega_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}+\varepsilon}}\preceq\begin{cases}n^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}+\varepsilon,}, & \dfrac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}>1-\varepsilon,\\ n\ln, & \dfrac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}=1-\varepsilon,\\ n, & \dfrac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}<1-\varepsilon\end{cases}$$

ve $-1<\gamma_2 \le 0$ için

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right) \preceq n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{(-\gamma_2)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}}} \preceq n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega_2^{+}\right|^{\frac{1+\varepsilon}{1+\beta_2}}} \preceq n^{\frac{1+\varepsilon}{1+\beta_2}}$$

buluruz.

Bu durumda, $\gamma_2>0$ için:

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{2,-}\right) \preceq \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}+\varepsilon}, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}>1-\varepsilon, \\ n\ln, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}=1-\varepsilon, \\ n, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}<1-\varepsilon \end{cases}$$

(4.72)

ve $-1<\gamma_2 \le 0$ ise

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{2,-}\right) \preceq n^{\frac{1+\varepsilon}{1+\beta_2}}$$

elde ederiz.

2.2 Eğer $z' \in S_2^{2,\pm}$ ise o zaman her $\gamma_1>-1$ için

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{2,-}\right) \preceq n \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma 2};\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}$$

$\tau \in F_{1,\mathrm{R}}^{2,+}$ için $\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|$'ten biz elde ederiz:

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right| \succeq \left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|$$

Eğer $\gamma_2>0$ olsun ve önceki durumlara benzer şekilde aşağıdakini elde ederiz:

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right) \preceq n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|} \preceq \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon}} \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon}$$

eğer ve $-1<\gamma_2 \le 0$ ise

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right) \preceq n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{(-\gamma_2)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|} \preceq n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|} \preceq n^{1+\varepsilon}$$

bu durumdan biz, $\gamma_2>0$ için :

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{2,-}\right) \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon} \tag{4.73}$$

ve $-1<\gamma_2 \le 0$ için

$$J\left(F_{1,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{1,R}^{2,-}\right) \preceq n^{1+\varepsilon}$$

elde edilir .

2.3 Eğer $z^{'} \in S_1^{2,\pm}$ ise, o zaman her $\gamma_2>0$ için

$$\begin{aligned} J\left(F_{2,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{2,-}\right) &\preceq n \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma 2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega^{'})\right|} \\ &\preceq n \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma 2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega^{'})\right|} \\ &+n \int\limits_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{\gamma 2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega^{'})\right|} \end{aligned} \tag{4.74}$$

Son iki integraller aynı şekilde değerlendirilir. Birinci integralle bakalım. Her $\tau \in F_{1,\mathrm{R}}^{2,+}$ ve $z^{'} \in S_1^{2,\pm}$ için biz aşağıdakini elde ederiz:

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega^{'})\right| \succeq \left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|;$$

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right| \succeq d_{2,R} \succeq \left|z_{2,R}-z_2^{+}\right|^{\frac{1}{1+\beta_2}} \succeq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{1+\beta_2}}$$

buradan

$$J\left(F_{2,R}^{2,+}\right) \preceq n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|} \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon} \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega_2^+\right|^{1+\varepsilon}} \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon}$$

her $\gamma_2 > 0$ için ve

$$J\left(F_{2,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{2,-}\right) \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon}$$

$-1<\gamma_2 \le 0$ için sağlanıdığını buluruz ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} J\left(F_{2,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{2,-}\right) &= n \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{(-\gamma_2)}\left|\Psi'(\tau)\right||d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|^2} \\ &\preceq n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|} \preceq n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega_2^+\right|^{1+\varepsilon}} \preceq n^{1+\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.75}$$

elde ederiz. Buna göre

$$J\left(F_{2,R}^{2,+}\right)+J\left(F_{2,R}^{2,-}\right) \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon} \tag{4.76}$$

2.4 Eğer $z' \in S_2^{2,\pm}$ ise, o zaman her $\gamma_2 > 0$ için

$$J\left(F_{2,R}^{2,+}\right) \preceq \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2}} \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|} \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}(1+\varepsilon)} \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega'\right|^{1+\varepsilon}} \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon} \tag{4.77}$$

ve $-1<\gamma_2 \le 0$ için

$$\begin{aligned} J\left(F_{2,R}^{2,-}\right) &\preceq \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2}} \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|} \\ &\preceq n^{1+\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+\varepsilon} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|} \preceq n^{1+\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+\varepsilon} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-\omega'\right|^{1+\varepsilon}} \preceq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.78}$$

buluruz.

$z' \in S_2^{2,-}$ durumu tamamen aynı $z' \in S_2^{2,+}$ durumuna benzerdir. Eğer $-1<\gamma_2 \le 0$ ise, o zaman

$$J\left(F_{2,R}^{2,+}\right)=\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{(-\gamma_2)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|^2}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}\preceq n^{1+\varepsilon} \tag{4.79}$$

ve

$$J\left(F_{2,R}^{2,-}\right)=\int\limits_{F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega_2)\right|^{(-\gamma_2)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|^2}$$
$$\preceq n\int\limits_{F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(\omega')\right|}\preceq n^{1+\varepsilon}. \tag{4.80}$$

bulunur. (4.58), (4.72) - (4.80) değerlendirmelerin birleştirerek aşağıdakini elde ederiz:

$$J_{n,2}^2\preceq n^{1+\varepsilon}\ ,\ -1<\gamma_2\leq 0\ \text{ ve her }\ \gamma_2>0\ \ J_{n,2}^2\leq n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon} \tag{4.81}$$

Şimdi (4.81) ve (4.70) değerlendirmelerinden, $m_1=1, m_2=1$ ve her $p>0$ sayısı için aşağıdakini elde ederiz:

her $-1<\gamma_1\leq 0,\ -1<\gamma_2\leq 0,$

$$J_{n,2}^1+J_{n,2}^2\leq n^{1+\tilde{\varepsilon}}+n^{1+\varepsilon}, \tag{4.82}$$

her $\gamma_1>0,\ \gamma_2>0,$ ve

$$J_{n,2}^1+J_{n,2}^2\leq n^{\gamma_1+1+\tilde{\varepsilon}}+n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1+\varepsilon}, \tag{4.83}$$

burada $\tilde{\varepsilon}:=\begin{cases}\varepsilon, & eğer\ \alpha_1=0,\\ 1, & eğer\ \alpha_1\neq 0.\end{cases}$

o, halde, (4.52) - (4.58), (4.82) ve (4.83) değerlendirmelerini birlştirerek keyfi $z\in\Gamma$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\left|K_n(z)\right| \le n^{\frac{\tilde{\gamma}+1+\tilde{\varepsilon}}{p}} + n^{\left(\frac{\tilde{\gamma}_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1}{p}+\varepsilon} \le \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1+2}{p}}, & \gamma_1 > \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2},\ \gamma_2 > 1+\beta_2; \\ n^{\frac{\gamma_1+2}{p}}, & \gamma_1 > 0,\ 0<\gamma_2<1+\beta_2; \\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1}{p}+\varepsilon}, & 0<\gamma_1 \le \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2}-1,\ \gamma_2 > 1+\beta_2; \\ n^{\frac{2}{p}}, & -1<\gamma_1 \le 0,\ -1<\gamma_2<1+\beta_2; \end{cases}$$

eğer $\alpha_1 \neq 0$ ve

$$\left|K_n(z)\right| \preceq \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1+1}{p}+\varepsilon} & \gamma_1 > \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2}, \gamma_2 > 0 \\ n^{(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1)\frac{1}{p}+\varepsilon}, & 0<\gamma_1 \le \dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2},\quad \gamma_2 > 0 \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon} & -1<\gamma_1,\gamma_2 \le 0 \end{cases}$$

eğer $\alpha_1 = 0$ ise.

Teorem ispatı tamamlandı.

SONUÇ

Eğri üzerinde verilmiş sıfır ve kutup yerlerine sahip ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal polinomların düzgün normlarının ve singüler noktalardaki değerlerinin modülce artışlarının, değerlendirilmesi ve bu değerlendirilmelerde eğrinin ve ağırlık fonksiyonun etkisinin gösterilmesi esas amacımızdır. Elde edilmesi tahmin edilen sonuçların matematiğin bir çok alanlarında (örneğin, yaklaşım teorisinde, dahilolma teorisinde, polinomlar teorisinde vb.) uygulama bulacağı beklenmektedir.

Kompleks düzlemin verilmiş kapalı eğriler üzerinde ortonormal polinomların verilmiş ağırlık fonksiyonuna göre modülce artışlarının değerlendirilmesi ve bu değerlendirmelerde, verilen ağırlık fonksiyonuna ve eğrinin sahip olduğu özelliklerin etkisi elde edildi. Bu tez çalışmasında belirttiğimiz esas hedeflerimizde elde edilmesi tahmin edilen bütün sonuçlar yeni olmakla daha önceden bilinen ve literatürde rastlanan diğer benzeri sonuçları tamamladı. Problemin çözümünde elde edilen değerlendirmeler, ortonormal polinomların modülce artışları ilgili sonuçları farklı geometrik özelliklere sahip eğrilere genişletti. Bu değerlendirilmelerde verilmiş bölgenin geometrik veya fonksiyonel özellikleri ile ve ağırlık fonksiyonunun özellikleri açık şekilde gösterildi. Aynı zamanda, elde edilen değerlendirmeler, Nikol'skii tipi eşitsizliklerin bu tür eğriler üzerinde benzerlerini ortaya koydu.

Bu Tez çalışmasında, verilmiş kapalı Jordan eğrisi üzere ortonormal polinomlar için değerlendirmeler, çeşitli fonksiyonel koşul ve geometrik özelliklerle tanımlanan Jordan eğrileri sınıflarında ele alındı ve aşağıda verilen iki problem incelendi:

1). $(1+\gamma_1)\omega_1 = 1$ koşulu sağlandığında verilmiş kapalı Jordan eğrisi üzere ortonormal polinomlar için değerlendirmeler elde edildi;

2). $(1+\gamma_1)\omega_1 \neq 1$ koşulu sağlandığında verilmiş kapalı Jordan eğrisi üzere ortonormal polinomlar için değerlendirmeler elde edildi

KAYNAKLAR

[1] F. G. Abdullayev, "On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane1," Ukr. Math. J., 52, No. 12, 1807–1817 (2000).

[2] F. G. Abdullayev, "On the interference of the weight boundary contour for orthogonal polynomials over the region," J. of Comp. Anal. and Appl., 6, No. 1, 31–42 (2004).

[3] F. G. Abdullayev and N. P. Ozkartepe, "On the behavior of the algebraic polynomial in unbounded regionswith piecewise Dini-smooth boundary," Ukr. Math. J., 66, No. 5, 579–597 (2014).

[4] F. G. Abdullayev and C. D. G¨un, "On the behavior of the algebraic polynomials in regions with piecewise smooth boundary without cusps," Ann. Polon. Math., 111, 39–58 (2014).

[5] F. G. Abdullayev and N. P. Ozkartepe, C. D. G¨un, "Uniform and pointwise polynomial in ¨equalities in regions without cusps in the weighted Lebesgue space," Bulletin of Tbilisi ICMC, 18, No. 1, 146–167 (2014).

[6] F. G. Abdullayev and N. P. Ozkartepe, "On the growth of algebraic polynomials in the wh ole complex plane," J. of Korean Math. Soc., 52, No. 4, 699–725 (2015).

[7] F. G. Abdullayev and N. P. Ozkartepe, "Uniform and pointwise polynomial inequalitie ¨ s in regions with cusps in the weighted Lebesgue space," Jaen J. on Approx., 7, No. 2, 231–261 (2015).

[8] F. G. Abdullayev, The interference condition of the weight and contour for orthogonal polynomials over a contour I, (2016) (submitted).

[9] V. V. Andrievskii, V. I. Belyi, and V. K. Dzyadyk, Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane, World Federation, Atlanta, 1995

[10] .V. V. Andrievskii and H. P. Blatt, Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation, Springer,New York,2010.

[11] V. V. Andrievskii, "Weighted polynomial inequalities in the complex plane," J. of Approx. Theory, 164, No. 9, 1165–1183 (2012).

[12] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal mappings, Princeton, NJ: Van Nostrand, 1966

[13] L. V. Ahlfors , Complex Analysis, McGraw-Hill, Inc., USA, 1969

[14] J. M. Anderson, J. Becker, and F. D. Lesley, Boundary values of asymptotically conformal

[15] T. Başkan, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Bursa, 2012

[16] P.P. Belinskii, General Properties of Quasiconformal Mappings, Nauka, Sib. otd., Novosibirsk, 1974. [in Russian]

[17] J. Becker, C. Pommerenke, Uber die quasikonforme Fortsetzung schlichten Funktionen, Math. Z., 1978, 161, 69-80.

[18] J. D. Depree, C. C. Oehring, Elements of Complex Analysis, Addison Wesley Publishing Company, USA, 1969

[19] E.M. Dyníkin, Nonanalytic symmetry principle and conformal mappings. - St. Petersburg Math. J., vol. 5, pp. 523ñ544, 1994.

[20] D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhauser Boston, 1987

[21] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, On asymptotically conformal curves, Complex Variables, vol. 25, pp. 357ñ366, 1994.

[22] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, On the local behaviour of quasi-conformal mappings, Izvestiya: Mathematics, vol. 59, no. 3, pp. 471-498, 1995,

[23] V.Gutlyanskii, V. Ryazanov, On quasi-circles and asymptotically conformal circles, Dokl. Ross. Akad. Nauk, vol. 330, no. 5, pp. 546-548, 1993; (English transl., Russian Acad. Sci. Math., vol. 47, pp. 563-566, 1993).

[24] D. Gaier, "On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners," Constr. Approx., 4, 289–305 (1988).

[25] E. Hille, G. Szeg¨o, and J. D. Tamarkin, "On some generalization of a theorem of A. Markoff," Duke Math., 3, 729–739 (1937).

[26] D. Jackson, "Certain problems on closest approximations," Bull. Amer. Math. Soc., 39, 889–906 (1933).

[27] O. Lehto, K. Virtanen . Quasiconformal mappings in the plane, New York, Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 1973.

[28] F. D. Lesley, "H¨older continuity of conformal mappings at the boundary via the strip method, "Indiana Univ. Math .J. ,31, 341–354 (1982).552

[29] D. I. Mamedhanov, "Inequalities of S.M. Nikol'skii type for polynomials in the complex variable on curves," Soviet Math. Dokl., 15, 34–37 (1974).

[30] D. I.Mamedhanov,"On Nikol'skii-type inequalities with new characteristics," Doklady Mathem. 82, 882– 883 (2010).

[31] G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, and Th. M. Rassias, Topics in Polynomials:Extremal Problems, Inequalities, Zeros, World Scientific, Singapore, 1994.

[32] S. M. Nikol'skii, Approximation of Function of Several Variable and Imbedding Theorems, Springer, New York, 1975.

[33] Ch. Pommerenke, Boundary Behavior of Conformal Maps, Springer, Berlin, 1992.

[34] Ch. Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer- Verlag, USA, 1992.

[35] Ch. Pommerenke, S.E. Warschawski, On the quantitative boundary behavior of conformal maps, Comment. Math. Helv., vol. 57, pp. 107-129, 1982.

[36] I. Pritsker, "Comparing norms of polynomials in one and several variables," J. of Math. Anal. And Appl.,216, 685–695 (1997).

[37] S. Rickman, "Characterisation of quasiconformal arcs," Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, Math., 395, 1–30 (1966).

[38] V. I. Smirnov, "Sur la theorie des polynomes orthogonaux a une variable complexe," J. Leningrad Fiz.-Math. Fellow., 2, No. 1, 155–179 (1928).

[39] G. Szeg¨o, "Uber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der ¨ komplexen Ebene geh¨oren," Mathem. Zeitschr., 9, 218–270 (1921).

[40] G. Szeg¨o, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., New York, 1959.

[41] G. Szeg¨o and A. Zigmund, "On certain mean values of polynomials," J. Anal. Math., 3, 225–244 (1954).

[42] P. K. Suetin, "The ordinally comparison of various norms of polynomials in the complex domain, "Mat. Zap. Ural. Gos. Univ., 5, (1966), No. 4, 91–100 (1966).

[43] P. K. Suetin, "On some estimates of the orthogonal polynomials with singularities weight and contour," Sib. Math. J., VIII, No. 3, 1070–1078 (1967).

[44] S. E. Warschawski, "On differentiability at the boundary in conformal mapping," Proc. Amer. Math. Soc., 12, 614–620 (1961).

[45] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, AMS, Providence, RI, 1960.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Zaripa TAŞBAEVA

Uyruğu: kırgız

Doğum Tarihi ve Yeri: 14.10.1993 Kırgızistan ,Batken bölgesi

Durumu: Evli

Tel: +996 (771) 851084

email: Zaripatashbaeva@mail.ru

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü	……
Lisans	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü.	2016
Lise	Manas Lisesi	2011

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
……	....	....

YABANCI DİL

Türkçe

Rusça

İngilizce