КЫРГЫЗ - ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

Даярдаган
Улан АШЫРБАЕВ

Жетекчиси
Ф.-м. и. док., профессор Авыт АСАНОВ

Магистрдик диссертация

Июнь 2018
КЫРГЫЗСТАН / БИШКЕК

КЫРГЫЗ -ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

Даярдаган
Улан АШЫРБАЕВ

Жетекчиси
Ф.-м. и. док., профессор Авыт АСАНОВ

Магистрдик диссертация

Июнь 2018
КЫРГЫЗСТАН / БИШКЕК

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Бул иште бардык тиешелүү илимий маалыматтар академикалык жана этикалык эрежелерге туура келгенин жана техникалык маселесинин көрсөтүлгөнүн билдирем. Темага байланыштуу материалдар каралып жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетем жана жыйынтык изилденгенин билдирүү менен сунуштайм.

Аты - жөнү: Улан АШЫРБАЕВ

Колу:

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Ulan AŞIRBAEV

İmza:

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Төртүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо маселеси” аттуу магистрдик иш, Кыргыз – Түрк “Манас” университетинин магистрдик иш мыйзамдарынын жана магистрдик иш жазма куралдарынын чегинде жазылды.

Даярдаган:	Илимий жетекчиси:
Улан АШЫРБАЕВ	Ф.-м.и. док., профессор Авыт АСАНОВ
Колу:	Колу:

Математика багытынын мүдүрү

Ф.-м.и.к., профессор Анаркүл УРДАЛЕТОВА

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLULUK

“Dördüncü Mertebeden Lineer ve Diferansiyel Pseudoparabolik Denklemler İçin Sağ Tarafın Bulunması Problemleri” adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi hazırlayan	Danışman
Ulan AŞIRBAEV	Prof. Dr. Avıt ASANOV
İmza:	İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Anarkül URDALETOVA

İmza:

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ

Ф. - м.и.док., профессор Авыт АСАНОВ жетекчилигинде Улан АШЫРБАЕВ тарабынан даярдалган “Төртүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо маселеси” аттуу темада магистрдик иш комиссия тарабынан Кыргыз - Түрк “Манас” Университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдик иш болуп кабыл алынды.

……….. /…… / ………..

Комиссия:

Илимий жетекчиси	:Ф.-м.и. док., профессор Авыт Асанов	……….
Төрагасы	:Ф.-м.и.док., профессор Байзаков Асан	……….
Мүчө	:Ф.-м.и.к., профессор Урдалетова Анаркүль	……….
Мүчө	:Ф.-м.и.док., профессор Абдуллаев Фахреддин	……….
Мүчө	:Ф.-м.и.док., профессор Өмүралиев Асан	……….
Мүчө	:Доц. Док. Дагыстан Шимшек	……….

ЧЕЧИМ :

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин …………… датасында жана …………… санындагы чечими менен бекитилди.

………. /……../ ………

Доц. Док. Дагыстан ШИМШЕК
Институт мүдүрү

KABUL VE ONAY

Prof. Dr. Avıt ASANOV danışmanlığında Ulan AŞIRBAEV tarafından hazırlanan“Dördüncü Mertebeden Lineer ve Diferansiyel Pseudoparabolik Denklemler İçin Sağ Tarafın Bulunması Problemleri” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

……….. /…… / ………..

JÜRİ:

Danışman	: Prof. Dr. Avıt ASANOV	….……..
Üye	: Prof. Dr. Asan BAYZAKOV	….……..
Üye	: Prof. Dr. Anarkül URDALETOVA	….……..
Üye	: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	….……..
Üye	: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALIYEV	….……..
Üye	: Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	….……..

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ………...… tarih ve …………..…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………. /……../ ………

Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

Enstitü Müdürü

АЛГАЧ СӨЗ / ЫРААЗЫЧЫЛЫК

Билим алууда салымы чоң, магистрдик иштин толугу менен бүтүшүнө, сабырдуулук менен өз эмгегин жана жардамын аябаган жетекчиме, урматтуу агайым физика - математика илимдеринин доктору, профессор Авыт Асановго жана ушул дипломдук изилдөө ишимди жазууда баалуу кеңештерин берген физика - математика илимдеринин доктору, профессор Бактыбай Аблабеков агайыма терең ыраазычылыгымды билдирем.

Улан АШЫРБАЕВ

Бишкек, 2018

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

Улан Ашырбаев

Кыргыз - Түрк «Манас» университети, Табигый илимдер институту

Магистрдик иш, июнь 2018

Илимий жетекчиси: Ф.-м.и.док., проф. Авыт Асанов

АННОТАЦИЯ

Көбүнчө физикалык кубулуштар псевдопараболалык теңдемелер менен сүрөттөлөт. Мисалы, топурактын чыпкасы параметрлерин аныктоо, поралуу аймакта суюктукту чыпкалоо, көп катмарлуу жер астындагы бош суулардын кыймылы ж.б. Псевдопараболалык теңдемелер үчүн түрдүүчө тескери маселелер каралат.

Бул иште төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселеси изилденген. Тескери маселе теңдемедеги убакыттан көз каранды болгон белгисиз функцияларды ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденет.

Ачкыч сөздөр: тескери маселе, псевдопараболалык тендеме, кошумча шарт, Вольтеррдин интегралдык тендемелер системасы.

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER VE DİFERANSİYEL PSEUDOPARABOLİK DENKLEMLER İÇİN SAĞ TARAFIN BULUNMASI PROBLEMLERİ

Ulan Aşırbaev
Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2018
Danışman: Prof. Dr. Avıt ASANOV

GENİŞ ÖZET

Tabiatın olaylarını öğrenmede ve bu alınan bilgileri hayatta uygulamada tabiatın kanunlarına dayanmaktayız. Bu kanunları matematik dilinde yazılabilir. Örneğin kabul edelim ki fizik, teknik, kimya, biyoloji, iktisat ve başka bilim dallarının problemlerini incelemek gerekmektedir. Bu nedenle ilk önce o bilim dallarının kanunlarına göz önüne alarak verilen problemi matematik diline çevirip, problemin matematiksel modelini yazarız. Genellikle o matematiksel model bilinmeyen sayıları içeren denklem veya bilinmeyen fonksiyonu, onun türevini ve bağımsız değişkeni içeren denklemdir.

Birçok fiziksel olaylar pseudoparabolik denklemler yardımıyla incelenir. Örneğin, toprak parametrelerini filtreleme tanımı, kırık gözenekli ortamlarda sıvının süzülmesi, çok katmanlı ortamlarda serbest yüzeyli yeraltı suyu hareketi vb. pseudo-parabolik denklemler için, birçok farklı sorun dikkate alınır.

Bu yazıda, dördüncü mertebeden pseudoparabolik denkleminde sağ tarafin bulunması ters problemi incelenmiştir. Ters problem, bilinmeyen sağ tarafların, zamana bağlı olarak, iç noktalarda yeniden tanımlanması ile belirlenmesini içerir. Ters problemin çözümü için varlık ve teklik teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeleri: ters problem, pseudoparabolik denklem, ek koşullar, Volterra integral denklemler sistemi.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Улан Ашырбаев

Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Институт Естественных наук

Магистерская диссертация, июнь 2018

Научный руководитель: Док. ф.-м.н., Проф. Авыт Асанов

АННОТАЦИЯ

Многие физические явления описываются псевдопараболическими уравнениями. Например, определение фильтрации параметров грунтов, фильтрация жидкости в трещиновато-пористых средах, движение подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах и т.д. Для псевдопараболических уравнений рассматриваются множество различных задач.

В этой работе исследована обратная задача определения правой части в псевдопараболическом уравнении четвертого порядка. Обратная задача состоит в определении неизвестных правых частей зависящих от времени по переопределению во внутренних точках. Доказывается теорема существования и единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, условия переопределения, система интегральных уравнений Вольтерра.

THE PROBLEM OF DETERMINING THE RIGHT-HAND SIDE OF LINEAR DIFFERENTIAL PSEUDO-PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH-ORDER

Ulan Ashyrbaev

Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2018

Supervisor: Prof. Dr. Avyt ASANOV

ABSTRACT

Many physical phenomena are described by pseudo-parabolic equations. For example, the definition of soil parameters filtration, fluid filtration in fractured porous media, groundwater movement with a free surface in multilayer media, etc. A lot of different problems are considered for pseudo-parabolic equations.

The inverse problem of determining the right-hand sidesina fourth-order a pseudo-parabolic equation is investigated. The inverse problem consists in determining the unknown right-hand sides depending on the time byredefinition of the interior points. The existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem is proved.

Keywords: inverse problem, pseudoparabolic equation, over determination conditions, the method of the system of Volterra integral equations.

МАЗМУНУ

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

БИРИНЧИ БӨЛҮМ

ЭКИНЧИ БӨЛҮМ

ШАРТТУУ БЕЛГИЛЕРДИН ЖАНА АНЫКТАМАЛАРДЫН ТИЗМЕСИ

1. R – баардык сандардын көптүгү.

2. N = {1, 2, 3, …} – натуралдык сандардын көптүгү.

3. G={(t,x): $0\leq t\leq T$, $0\leq x\leq 1$}, $T\in R$, $T>0$.

4. u(…, x) эки өзгөрмөлүү бир функция үчүн

$Au=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_3 u$, x боюнча үчүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык оператору деп белгиленет.

Мында a_0, a_1, α_1, α_2, α_3- туруктуу берилген сандар, ал эми $a_0\neq 0$.

5. $R(t,s)=-\frac{a_1}{a_0}\exp\left(-\frac{a_1}{a_0}(t-s)\right)$ - Вольтерра түрүндөгү тиешелүү интегралдык теңдемеде $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$ ядронун резольвентасы.

6. Интеграл белгинин астындагы белгисиз функция - интегралдык теңдеме деп аталат.

7. $$y(t)=\int_a^t K(t,s)y(s)ds+f(t),\ a\leq s\leq t\leq b \qquad (1)$$

теңдемеси Вольтерранын экинчи түрүндөгү теңдеме деп аталат.

8. $$u_t=\alpha(D_1u)_t+\beta(D_2u)+f \qquad (2)$$

түрүндөгү теңдемеси псевдопараболалык теңдеме деп аталат. Мында α, β - туруктуу сандар.

КИРИШҮҮ

Дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган түз маселелердеги теңдемелердин бош мүчөсүн, коэффициенттерин жана границалык шарттарын чыгарылыш жөнүндөгү кошумча маалымат аркылуу табуу маселелерин тескери маселелер деп айтабыз [9], [13]. Теңдеменин чыгарылышынын кошумча маалыматтар (б.а. натыйжалар) ар кандай болушу мүмкүн. Мисалы, кошумча маалымат кандайдыр бир ар түрдүүлүгүндө же областында ылайыктуу түз маселенин чыгарылыштын бир кадамындай берилет. Эгерде изделүүчү дифференциалдык теңдеме сызыктуу болуп саналса, анда тескери маселеси белгисиз коэффициенттерди же теңдеменин оң жагын издеп табууга келип такалат [14]. Мындай маселелердин үйрөнүү зарылдыгы практикалык керектигинен келип чыгат. Мисалы, физикалык процесстердин моделин жасаган, дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда, тандалган моделдин жана реалдуу объектин ортосунда жакшы ылайык келишими маанилүү. Мындай ылайык келишиминин зарыл шарттардан бири бул изилденип жаткан объекттин кээ бир механикалык параметр коэффициенттерди жана дифференциалдык теңдеменин оң жагын аныктоо. Мисалы катарында, жылуулук өткөрүүчү коэффициенти, диффузия коэффициенти, жылуу булактардын тыгыздыгы жана башкалар [10].

Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер [1], [2], [3], [15], [20] монографияларда изилденген. Ал эми [8], [17], [18], [19], [21] эмгектеринде төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн сызыктуу тескери маселелер каралган.

Бул диссертациялык иш эки бөлүмдөн турат. Биринчи бөлүмдө тескери маселе жөнүндө маалымат берилген [4], [12], [22], [10]. Экинчи тартиптеги сызыкуу дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган чектик маселени чыгарууда Грин функциясын колдонуу ыкмасы каралган [14]. Ошондой эле жогорку тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган жалпы түрдөгү чектик маселени чыгарууда Грин функциясын колдонуу ыкмасы каралган жана мисалдар келтирилген [14].

Экинчи бөлүмдө үчүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеменин айрым учурунда Грин функциясы тургузулган [16] жана төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселеси каралган [5], [6], [7], [11], [23], [24], [25]. Тескери маселе теңдемедеги убакыттан көз каранды болгон белгисиз функцияларды ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденген.

БИРИНЧИ БӨЛҮМ.

1.1 ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕЛЕР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Илимдин жана техниканын ар түрдүү тармактарында жүргүзүлгөн тажрыйбалардын максаты - бул изилдөөчүнү кызыктырган объектилердин же процесстердин касиеттерин изилдөө. Бирок, эреже боюнча, объекти же процессти түздөн-түз изилдөө мүмкүн эмес, же кооптуу, же өтө чоң финансылык чыгымдарга алып келет. Мисалы, жылдыздарды жана планеталарды изилдөө, адамдын ички органдарын изилдөөчү медициналык эксперименттер, жер астындагы пайдалуу кендерди табуу үчүн жердин ички түзүлүшүн изилдөөгө багытталган геофизикалык эксперименттер ж.б. Бул эксперименттерди жүргүзгөндө, изилдөөчү объектин же процесстин касиеттери жөнүндө корутундуну тажрыйбанын негизинде өлчөп алынган натыйжалардан чыгарат. Мисалы, жер титирөөнүн жерин жана магнитудасын аныктоо үчүн жер кыртышынын термелүүсүн, жер астындагы суулардын, газдын деңгээлдерин мониторинг жасашат. Демек, байкоодон алынган натыйжалар белгилүү болуп, аларга келтирген себептерди аныктоо маселелери каралат. Мындай түрдөгү маселелер тескери маселелер деп аталат.

Белгисиз функциялар боюнча тескери маселелер төмөнкүдөй бөлүнүшөт:

- Тескери маселе *ретроспективдүү* деп аталат, эгерде баштапкы шарттарды табуу керек болсо;
- Тескери маселе *чектик* деп аталат, эгерде чектик шарттагы функция белгисиз болсо;
- Тескери маселе *коэффициенттик* деп аталат, эгерде негизги теңдемедеги коэффициенттер белгисиз болушса;
- Тескери маселе *булак жөнүндө* тескери маселе деп аталат, эгерде булакты табуу керек болсо (мисалы, жылуулуктун булагы), б.а. бул теңдеменин оң жагын табуу маселеси.

1.2 ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН КОЮЛУШУ. ГРИН ФУНКЦИЯСЫ.

Бул параграфта экинчи тартиптеги сызыкуу дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган чектик маселени чыгарууда Грин функциясын колдонуу ыкмасы каралат.

Сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемелер боюнча мүнөздөлүүчү тигил же бул процесстерди изилдөөдө белгисиз функция аныкталган облустун чегинде (кесиндинин учтарында) берилген шарттарды канааттандырган чыгарылыштарды табууга туура келет. Мындай шарттар чектик (чектеги) шарттар деп аталат. $\left[x_0, x_1\right]$ кесиндисинде чектик шарттар төмөнкүдөй жөнөкөй түрдө

$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$ (биринчи түрдөгү чектик шарт)

$y'(x_0) = y_{01}, \quad y'(x_1) = y_{11}$ (экинчи түрдөгү чектик шарт)

$$\begin{aligned} &y'(x_0) + ay(x_0) = y_0, \\ &y'(x_1) + \beta y(x_1) = y_1 \end{aligned}$$ (үчүнчү түрдөгү чектик шарт)

жана жалпы түрдө

$$\begin{aligned} V_1[y] &= A_1[y(x_0)] + B_1[y(x_1)] = 0, \\ V_2[y] &= A_2[y(x_0)] + B_2[y(x_1)] = 0, \end{aligned}$$

берилиши мүмкүн. Мында $x_0, x_1, y_0, y_1, \alpha, \beta$ – белгилүү сандар, ал эми $A_1[y(x_0)], A_2[y(x_0)], B_1[y(x_1)], B_2[y(x_1)]$ - белгилүү функциялар.

Жөнөкөй чектик маселе. Сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемелердин жалпы түрүн

$$\gamma(x) = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} = \frac{1}{a_0(x)} p(x)$$

функциясына көбөйтүп, тендемени дайыма

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = f(x)$$

же

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x) \qquad (1.2.1)$$

түрүнө келтирүүгө болот. Бул түрдөгү теңдеме өзүнө-өзү тутумдаш болгон теңдеме деп аталат.

Эми

$$y(x_0) = 0, y(x_1) = 0 \qquad (1.2.2)$$

түрүндөгү бир тектүү чектик шарттарын карайлы.

ЭСКЕРТМЕ. $z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1$ түрүндөгү бир тектүү эмес чектик шарттарды

$$y(x) = z(x) - \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - z_0$$

барабардыгынын негизинде дайыма (1.2.2) түрүнө келтирүүгө болот. Ушундай эле жол менен бир тектүү эмес чектик шарттардын башка түрлөрү да бир тектүү чектик шарттарга келтирилет.

АНЫКТАМА. (1.2.1) теңдемесинин (1.2.2) чектик шарттарды канааттандырган чыгарылышын табуу маселеси *жөнөкөй чектик маселе* деп аталат.

Чектик маселени чыгаруу ыкмасы эки баскычтан турат. Чыгаруунун биринчи баскычында

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0 \tag{1.2.3}$$

сызыктуу бир тектүү теңдемени (1.2.2) чектик маселеси менен бирге карайбыз. Бул бир тектүү чектик маселе нөлдүк гана чыгарылышка ээ болсо, анда Гриндин функциясын табуу керек.

АНЫКТАМА. Эгерде x жана s өзгөрүлмөлөрүнүн $x_0 \le x \le x_1, \quad x_0 \le s \le x_1,$ маанилеринде аныкталган $G(x,s)$ функциясы төмөнкүдөй

1) $x = s,$ чекитинде үзгүлтүксүз болсун, б.а.

$$G(s+0,s) = G(s-0,s) \tag{1.2.4}$$

барабардыгы аткарылса;

2) $x_0 \le x \le s, \quad s \le x \le x_1,$ интервалдарынын ар биринде (1.2.3) теңдемесинин чыгарылышы болсо;

3) (1.2.2) чектик шарттарын канааттандырса, б.а.

$$G(x_0,s) = 0, \quad G(x_1,s) = 0, \quad x_0 < s < x_1 \tag{1.2.5}$$

барабардыктары орун алсын;

4) x боюнча алынган биринчи тартиптеги туундусу $x = s$ чекитинде үзгүлтүккө учурап,

$$G'(s+0,s) - G'(s-0,s) = \frac{1}{p(s)} \tag{1.2.6}$$

барабардыгы орун алса;

5) аргументтерине карата симметрия касиетине ээ болсо, б.а.

$$G(x,s) = G(s,x) \tag{1.2.7}$$

барабардыгы орун алса, анда $G(x,s)$ функциясы (1.2.1)-(1.2.2) чектик маселесинин *Грин функциясы* деп аталат.

ТЕОРЕМА. Эгерде (1.2.1)-(1.2.2) чектик маселеси үчүн $G(x,s)$ Грин функциясы белгилүү болсо, анда анын чыгарылышы

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds \tag{1.2.8}$$

формуласы боюнча аныкталат.

***ДАЛИЛДӨӨ*:** (1.2.8) функциясын

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} G(x,s)f(s)ds+\int_{x}^{x_1} G(x,s)f(s)ds$$

түрүндө жазып алып, анын биринчи жана экинчи тартиптеги туундуларын Грин функциясынын 1) жана 4) касиеттерин эске алуу менен табалы:

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x} G'_X(x,s)f(s)ds+\int_{x}^{x_1} G'_X(x,s)f(s)ds,$$

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s)f(s)ds+$$
$$+\int_{x}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)ds+\left(G'_x(x,x+0)-G'_x(x,x-0)\right)f(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x} G''_{XX}(x,s)f(s)ds+\int_{x}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)ds+\frac{1}{p(x)}f(x).$$

Бул туундуларды жана $y(x)$ функциясын (1.2.8) теңдемесине коюп

$$\int_{x_0}^{x}\left[p(x)G''_{xx}(x,s)+p'(x)G'_{XX}(x,s)+q(x)G_{XX}(x,s)\right]f(s)ds+$$
$$+\int_{x}^{x_1}\left[p(x)G''_{xx}(x,s)+p'(x)G'_{xx}(x,s)+q(x)G_{xx}(x,s)\right]f(s)ds+f(x)=f(x)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардыктан Грин функциясынын 2-касиетинин негизинде $f(x)\equiv f(x)$ теңдештиги келип чыгарын, ал эми андан (1.2.8) функциясы (1.2.1) теңдемесинин чыгарылышы болорун көрөбүз.

(1.2.8) функциясынын (1.2.2) чектик шарттарды канааттандыра тургандыгы Грин фунциясынын 3) касиетинин негизинде келип чыгат.

Эми Грин функциясын табуу ыкмасын көрсөтөлү. (1.2.2) теңдемесинин $y(x_0)=0, \quad y'(x_0)\neq 0$ баштапкы шарттарды канааттандырган чыгарылышын $y_1(x)$ менен белгилейли. Анда $C_1(s)y_1(x)$ функциясы s параметринин каалагандай маанисинде (1.2.3) теңдемесинин $y(x_0)=0$ шартын канааттандырган чыгарылышы болот.

(1.2.3) теңдемесинин $y(x_1)=0, \quad y'(x_1)\neq 0$ баштапкы шарттарды канааттандырган жана $y_1(x)$ функциясы менен өз ара сызыктуу көз каранды эмес болгон чыгарылышын $y_2(x)$ менен белгилейли. Анда $C_2(s)y_2(x)$ функциясы s параметринин каалагандай маанисинде $y(x_1)=0$ шартын канааттандырган чыгарылышы болот.

Грин функциясын

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(s)y_1(s), & x_0\le x<s, \\ C_2(s)y_2(s), & s<x\le x_1 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

барабардыгы боюнча аныктайбыз. Мындагы белгисиз $C_1(s), C_2(s)$ функцияларын Грин функциясынын касиеттери орун ала тургандай кылып аныктоо керек.

Грин функциясынын 1) жана 4) касиеттеринин негизинде (1.2.9) функциясын (1.2.4) жана (1.2.6) барабардыктарына коюп

$$\begin{cases} C_1(s)y_1(s)-C_2(s)y_2(s)=0 \\ C_1(s)y_1'(s)-C_2(s)y_2'(s)=-\dfrac{1}{p(s)} \end{cases}$$

системасына ээ болобуз. $y_1(x)$ жана $y_2(x)$ функциялары өз ара сызыктуу көз каранды эмес болушкандыктан системанын негизги аныктагычы үчүн $\Delta=-W(s)\neq 0$ шарты аткарылат. Ошондуктан бул системадан белгисиз $C_1(s), C_2(s)$ чоңдуктары бир маанилүү аныкталат, б.а.

$$C_1(s) = \frac{y_2(s)}{p(s)W(s)}, \; C_2(s) = \frac{y_1(s)}{p(s)W(s)} \qquad (*)$$

барабардыктары орун алат. Бул чоңдуктарды (1.2.8) формуласына коюп

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(s)y_1(x)}{p(s)W(s)}, & x_0 \le x < s, \\ \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{p(s)W(s)}, & s < x \le x_1 \end{cases} \qquad (**)$$

түрүндөгү Грин функциясына ээ болобуз.

МИСАЛ. Төмөнкүдөй

$$y''(x) - y(x) = x,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

чектик маселесинин чыгарылышын Грин функциясын колдонуп табалы.

ЧЫГАРУУ: 1) Берилген теңдемеге туура келген $y''(x) - y(x) = 0$ бир тектүү теңдемеси менен $y(0) = y(1) = 0$ түрүндөгү чектик шарттарын карайбыз. Бул маселесинин Грин функциясын табалы. Ал үчүн бир тектүү сызыктуу теңдеменин фундаменталдык системасын табабыз. $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ функциялары фундаменталдык системаны түзөрүн, теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Түрүндөгү функция болорун жана бул чыгарылыш берилген чектик шарттарды $C_1 = C_2 = 0$ маанисинде гана канааттандыра тургандыгын оңой эле текшерүүгө болот. Мындан бир тектүү чектик маселе нөлдүк $\left(y(x) \equiv 0\right)$ гана чыгарылышка ээ болоорун көрөбүз. Бул болсо каралган чектик маселе үчүн Гриндин функциясы бар экендигин көрсөтөт. Түздөн-түз эсептөө жолу менен Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{sh x\, sh(\xi - 1)}{sh 1}, & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{sh(\xi) sh(x-1)}{sh 1}, & \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

түрүндө болоорун табабыз. Ошондуктан, бир тектүү эмес теңдеме үчүн коюлган чектик маселенин чыгарылышы

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi=\int_0^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi=$$
$$=\int_0^x \frac{sh\xi\, sh(x-1)}{sh1}\xi d\xi+\int_x^1 \frac{shx\, sh(\xi-1)}{sh1}\xi d\xi=\frac{shx}{sh1}-x$$

барабардыгы боюнча табылат.

ТЕКШЕРҮҮ:

$$y'(x)=\frac{chx}{sh1}-1,\quad y''(x)=\frac{shx}{sh1}$$

туундуларын сызыктуу бир тектүү эмес теңдемеге койсок,

$$y''(x)-y(x)=\frac{shx}{sh1}-\left(\frac{shx}{sh1}-x\right)\equiv x$$

теңдештигине ээ болобуз, б.а. табылган $y(x)=\dfrac{shx}{sh1}-x$ функциясы теңдеменин чыгарылышы болот. Бул фунциянын чектик шарттарды канааттандыра тургандыгын оңой эле эсептөөгө болот:

$$y(0)=\frac{sh0}{sh1}-0=0,\quad y(1)=\frac{sh1}{sh1}-1=0.$$

Жалпы түрдөгү чектик маселе. Эми

$$L[y]=p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x) \tag{1.2.10}$$

теңдемеси менен бирге берилген

$$\begin{aligned}V_1[y]=A_1[y(x_0)]+B_1[y(x_1)]=0,\\ V_2[y]=A_2[y(x_0)]+B_2[y(x_1)]=0,\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

чектик шарттарын карайлы, мында

$$A_1[y(x_0)]=\alpha_{11}y(x_0)+\alpha_{12}y'(x_0),\ B_1[y(x_1)]=\beta_{11}y(x_1)+\beta_{12}y'(x_1),$$
$$A_2[y(x_0)]=\alpha_{21}y(x_0)+\alpha_{22}y'(x_0), B_2[y(x_1)]=\beta_{21}y(x_1)+\beta_{22}y'(x_1),$$

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}$ - туруктуу сандар, ал эми $V_1[y]$ жана $V_2[y]$ сызыктуу формалары өз ара сызыктуу көз каранды эмес болушат, б.а.

$$h_1 V_1(y) + h_2 V_2(y) \equiv 0$$

теңдештиги $h_1 = h_2 = 0$ болгондо гана аткарылат.

Маселенин жалгыз чыгарылышка ээ болушу жөнүндө $n-$ тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер бөлүмүндө толук айтылат. Ошондуктан бул жерде Грин функциясын тургузуу жана чектик маселенин чыгарылышын табуу ыкмасына гана токтолобуз.

Чыгаруунун биринчи этабында (1.2.10) теңдемесине тура келген

$$L[y] = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (1.2.12)$$

Бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдемесин (1.2.11) чектик шарттары менен бирге карайбыз.

1) Алгач бул маселе нөлдүк гана чыгарылышка ээ болоорун текшерүү керек
2) Андан кийин Грин функциясын тургузууга өтөбүз.

Грин функциясын

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)y_1(x) + a_2(\xi)y_2(x), & x_0 \le x < \xi, \\ b_1(\xi)y_1(x) + b_2(\xi)y_2(x), & \xi < x \le x_1 \end{cases} \qquad (1.2.13)$$

түрүндө издейбиз. Бул функция $[x_0, \xi)$ жана $(\xi, x_1]$ жарым интервалдарында (1.2.12) теңдемесинин чыгарылышы болот $a_1(\xi), a_2(\xi)$ жана $b_1(\xi), b_2(\xi)$ белгисиз функцияларын аныкташ үчүн $G(x,\xi)$ функциясы $x = \xi$ чекитинде үзгүлтүксүз жана $G'(x,\xi)$ туундусу $x = \xi$ чекитинде үзгүлтүккө учурай турганын эске алуу менен төмөнкүдөй системаны

$$\begin{cases} [b_1(\xi)y_1(\xi) + b_2(\xi)y_2(\xi)] - [a_1(\xi)y_1(\xi) + a_2(\xi)y_2(\xi)] = 0, \\ [b_1(\xi)y_1'(\xi) + b_2(\xi)y_2'(\xi)] - [a_1(\xi)y_1'(\xi) + a_2(\xi)y_2'(\xi)] = \dfrac{1}{p_0(\xi)} \end{cases} \qquad (1.2.14)$$

түзөбүз. Бул системаны

$$c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$$

белгилөөсүн жүргүзүп,

$$c_1(\xi)y_1(\xi)+c_2(\xi)y_2(\xi)=0,$$
$$c_1(\xi)y_1{}'(\xi)+c_2(\xi)y_2{}'(\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)} \qquad (1.2.15)$$

түрүндө жазабыз. Мында $W(\xi)\neq 0$ шарты аткарылат. Ошондуктан бул системадан $c_1(\xi)$ жана $c_2(\xi)$ функциялары бир маанилүү аныкталат. Андан ары $a_k(\xi)$ жана $b_k(\xi)$ функцияларын аныкташ үчүн (1.2.11) чектик шарттарын $y(x)=G(x,\xi)$ болсун деп, (1.2.13) негизинде аларды

$$\begin{aligned}
&V_1\left[G(x,\xi)\right]=A_1\left[G(x,\xi)\right]+B_1\left[G(x,\xi)\right]=\\
&=\alpha_{11}G(x_0,\xi)+\alpha_{12}G'(x_0,\xi)+\beta_{11}G(x_1,\xi)+\beta_{12}G'(x_1,\xi)=\\
&=\alpha_{11}[a_1(\xi)y_1(x_0)+a_2(\xi)y_2(x_0)]+\alpha_{12}[a_1(\xi)y_1{}'(x_0)+a_2(\xi)y_2{}'(x_0)]+\\
&+\beta_{11}[b_1(\xi)y_1(x_1)+b_2(\xi)y_2(x_1)]+\beta_{12}[b_1(\xi)y_1{}'(x_1)+b_2(\xi)y_2{}'(x_1)]=\\
&=a_1(\xi)[\alpha_{11}y_1(x_0)+\alpha_{12}y_1{}'(x_0)]+a_2(\xi)[\alpha_{11}y_2(x_0)+\alpha_{12}y_2{}'(x_0)]+\\
&+b_1(\xi)[\beta_{11}y_1(x_1)+\beta_{12}y_1{}'(x_1)]+b_2(\xi)[\beta_{11}y_2(x_1)+\beta_{12}y_2{}'(x_1)]=\\
&=a_1(\xi)A_1[y_1(x_0)]+a_2(\xi)A_1[y_2(x_0)]+b_1(\xi)B_1[y_1(x_1)]+b_2(\xi)B_1[y_2(x_1)]=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&V_2\left[G(x,\xi)\right]=a_1(\xi)A_2[y_1(x_0)]+a_2(\xi)A_2[y_2(x_0)]+\\
&+b_1(\xi)B_2[y_1(x_1)]+b_2(\xi)B_2[y_2(x_1)]=0
\end{aligned}$$

түрүндө жазууга болот. Мындан

$$a_1(\xi)=b_1(\xi)-c_1(\xi),\ a_2(\xi)=b_2(\xi)-c_2(\xi) \qquad (1.2.16)$$

болоорун эске алып, $b_1(\xi)$ жана $b_2(\xi)$ функцияларына карата

$$\begin{aligned}
&b_1(\xi)V_1[y_1]+b_2(\xi)V_1[y_2]=c_1(\xi)A_1[y_1]+c_2(\xi)A_1[y_2],\\
&b_1(\xi)V_2[y_1]+b_2(\xi)V_2[y_2]=c_1(\xi)A_2[y_1]+c_2(\xi)A_2[y_2]
\end{aligned} \qquad (1.2.17)$$

системасына ээ болобуз. Сызыктуу формалары өз ара сызыктуу көз каранды эмес болгондуктан

$$\begin{vmatrix} V_1[y_1] & V_1[y_2] \\ V_2[y_1] & V_2[y_2] \end{vmatrix}\neq 0$$

шарты орун алат. Ошондуктан (1.2.17) системасынанан $b_1(\xi)$ жана $b_2(\xi)$ функциялары бир маанилүү аныкталат. Табылган бул функцияларды (1.2.16) коюп, $a_1(\xi)$ жана $a_2(\xi)$ функцияларын табабыз. Андан ары (1.2.13) боюнча Грин функциясын алабыз.

МИСАЛ.

$$y''=0,\begin{cases} y(0)-y'(1)=0, \\ y'(0)-y(1)=0 \end{cases} \qquad (1.2.18)$$

чектик маселеси үчүн Грин функциясын табалы.

1) $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x$ берилген теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары болгондуктан теңдеменин жалпы чыгарылышы $y(x)=C_1+C_2x$ (1.2.104) түрүндөгү функция болот. Чектик шарттардын негизинде

$$\begin{aligned} &y(0)-y'(1)=C_1+C_2\cdot 0-C_2=0, \\ &y'(0)-y(1)=C_2-C_1-C_2=0 \end{aligned}$$

системадан $C_1=0,\ C_2=0$ болоорун көрөбүз. Демек (1.2.17) чектик маселеси $y(x)\equiv 0$ болгон нөлдүк гана чыгарылышка ээ болгондуктан, чектик маселе үчүн Грин функциясы бар болот.

2) Грин функциясын (1.2.13) ылайык

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1(\xi)\cdot 1+a_2(\xi)\cdot x, & 0\le x<\xi, \\ b_1(\xi)\cdot 1+b_2(\xi)\cdot x, & \xi<x\le 1 \end{cases} \qquad (1.2.20)$$

түрүндө издейбиз.

3) $p_0(x)=1$ болгондуктан (1.2.15) системасы

$$\begin{cases} c_1(\xi)\cdot 1+c_2(\xi)\cdot\xi=0 \\ c_1(\xi)\cdot 0+c_2(\xi)\cdot 1=1 \end{cases} \qquad (1.2.21)$$

түрүндө болот. Мындан $c_2(\xi)=1,\ c_1(\xi)=-\xi$ болорун көрөбүз.

4) Эми (1.2.17) системасын жазалы

$$\begin{aligned} &b_1(\xi)[y_1(0)-y_1{}'(1)]+b_2(\xi)[y_2(0)-y_2{}'(1)]=c_1(\xi)[y_1(0)]+c_2(\xi)[y_2(0)], \\ &b_1(\xi)[y_1{}'(0)-y_1(1)]+b_2(\xi)[y_2{}'(0)-y_2(1)]=c_1(\xi)[y_1{}'(0)]+c_2(\xi)[y_1(1)], \end{aligned}$$

тиешелүү чоңдуктардын маанилерин койгондон кийин

$$b_1(\xi)[1-0]+b_2(\xi)[0-1]=c_1\cdot 1+c_2\cdot 0=-\xi,$$
$$b_1(\xi)[0-1]+b_2(\xi)[1-1]=c_1\cdot 0+c_2\cdot 1=1$$
$$\begin{cases} b_1(\xi)-b_2(\xi)=-\xi \\ -b_1(\xi)=1 \end{cases},$$

системасы келип чыгат. Мындан

$$b_1(\xi)=-1,\ \ b_2(\xi)=\xi-1$$
$$a_1=b_1-c_1=-1+\xi,\ \ a_2=b_2-c_2=\xi-2$$

болорун көрөбүз.

5) Грин функциясы

$$G(x,\xi)=\begin{cases} (\xi-1)\cdot 1+(\xi-2)\cdot x, & 0\le x<\xi, \\ -1+(-1)x, & \xi<x\le 1 \end{cases}$$

түрүндөгү функция болот.

1.3 ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН КОЮЛУШУ. ГРИН ФУНКЦИЯСЫ.

Бул параграфта жогорку тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган жалпы түрдөгү чектик маселени чыгарууда Грин функциясын колдонуу ыкмасы каралат.

Коэффициенттери өзгөрүлмөлүү болгон

$$L[y] \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (1.3.1)$$

түрүндөгү n – тартиптеги сызыктуу бир тектүү дифференциалдык теңдемесинин төмөнкүдөй жалпы түрдө берилген

$$V_k(y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ki}(x)y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ki}(x)y^{(i)}(b) = 0, \quad k = 1,2,3,\ldots,n, \qquad (1.3.2)$$

чектик шарттарды канааттандырган Грин функциясын табуу маселесин карайлы. Бул жерде $a_0(x) \neq 0, a_1(x),\ldots,a_n(x)$ коэффициенттери *[a,b]* кесиндисинде аныкталган үзгүлтүксүз функциялар; $V_1(y),\ldots,V_n(y)$ сызыктуу туюнтмалары өз ара сызыктуу көз каранды эмес болгон чоңдуктар, б.а.

$$\gamma_1 V_1(y) + \ldots + \gamma_n V_n(y) = 0 \qquad (1.3.3)$$

шарты $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0$ болгондо гана аткарылат.

(1.3.1)-(1.3.2) бир тектүү чектик маселеси нөлдүк гана $\left(y(x) \equiv 0\right)$ чыгарылышка ээ болот деп Грин функциясын тургузалы.

АНЫКТАМА. Эгерде (a,b) аралыгында өзгөргөн $\xi, a < \xi < b,$ өзгөрүлмөсүнүн каалагандай маанисинде аныкталган $G(x,\xi), a \le x \le b$, функциясы төмөнкүдөй

1^0. $G(x,\xi)$ функциясы $a \le x \le b$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп, анын x аргументи боюнча $(n-1)$ – тартипке чейинки туундулары үзгүлтүксүз болсо;

2^0. $G(x,\xi)$ функциясынын x боюнча алынган $(n-1)$ – тартиптеги туундусу $x=\xi$ чекитинде 1-түрдөгү үзүлүшкө дуушар болуп, секириги $\frac{1}{a_0(x)}$ болсо, б.а.

$$\frac{\partial^{n-1}G(\xi+0,\xi)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}G(\xi-0,\xi)}{\partial x^{n-1}} \frac{1}{a_0(\xi)} \tag{1.3.4}$$

барабардыгы орун алса;

3^0. $G(x,\xi)$ функциясы $[a,\xi)$ жана $(\xi,b]$ жарым интервалдарынын ар биринде x аргументи боюнча (1.3.1) теңдемесинин чыгарылышы болсо,

4^0. $G(x,\xi)$ функциясы (1.3.2) чектик шарттарын канааттандырса, б.а. $V_k(G)=0, \quad k=1,2,3,...,n,$ барабардыктары аткарылса;

анда ал (1.3.1)-(1.3.2) чектик маселесинин *Грин функциясы* деп аталат.

ТЕОРЕМА. Эгерде (1.3.1)-(1.3.2) чектик маселеси нөлдүк гана чыгарылышка ээ болсо, анда ал бир гана Грин функциясына ээ болот.

ДАЛИЛДӨӨ: $y_1(x),y_2(x)...,y_n(x)$ функциялары (1.3.1) теңдемесинин өз ара сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары болсун. Грин функциясынын 3^0. касиети боюнча $G(x,\xi)$ функциясы $[a,\xi)$ жана $(\xi,b]$ жарым интервалдарынын ар биринде

$$G(x,\xi)=q_1(\xi)y_1(x)+...+q_n(\xi)y_n(x), a \le x < \xi,$$

жана (1.3.5)

$$G(x,\xi)=l_1(\xi)y_1(x)+...+l_n(\xi)y_n(x), \xi < x \le b,$$

түрүндө болот, мында $q_i(\xi)$ жана $l_i(\xi)$ - белгисиз чоңдуктар. Бул чоңдуктарды $G(x,\xi)$ функциясынын касиеттери орун алгыдай кылып аныктайбыз. $G(x,\xi)$

функциясынын жана анын x боюнча алынган биринчи, экинчи жана башка $(n-2)$ -тартиптеги туундуларынын $x=\xi$ чекитинде үзгүлтүксүз болушунан

$$\left[l_1(\xi)y_1(\xi)+...+l_n(\xi)y_n(\xi)\right]-\left[q_1(\xi)y_1(\xi)+...+q_n(\xi)y_n(\xi)\right]=0$$

$$\left[l_1(\xi)y_1'(\xi)+...+l_n(\xi)y_n'(\xi)\right]-\left[q_1(\xi)y_1'(\xi)+...+q_n(\xi)y_n'(\xi)\right]=0$$

$$\dots \qquad \dots. \qquad \dots. \qquad \dots$$

$$\left[l_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi)+...+l_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)\right]-$$
$$-\left[q_1(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)+...+q_n(\xi)y_n^{n-2}(\xi)\right]=0$$

барабардыктарына, ал эми 2-касиеттин негизинде

$$\left[l_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi)+...+l_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)\right]-$$
$$-\left[q_1(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)+...+q_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)\right]=\frac{1}{a_0(x)}$$

барабардыгына ээ болобуз. $s_k(\xi)=l_k(\xi)-q_k(\xi),\ k=1,2,3,...,n$ белгилөөлөрүн жүргүзүп, жогорудагы барабардыктарды төмөнкүдөй

$$\begin{cases} s_1(\xi)y_1(\xi)+...+s_n(\xi)y_n(\xi)=0 \\ s_1(\xi)y_1'(\xi)+...+s_n(\xi)y_n'(\xi)=0 \\ ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \\ s_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi)+...+s_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)=0 \\ s_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi)+...+s_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)=\dfrac{1}{a_0(x)} \end{cases}$$

система түрүндө жазабыз. Бул системаны $s_1(\xi),...,s_n(\xi)$ чоңдуктарына карата сызыктуу бир тектүү алгебралык теңдемелер системасы катары карасак, анын негизги аныктагычы $y_1(x),y_2(x)...,y_n(x)$ функцияларынын $x=\xi$ чекитиндеги маанисине барабар болот. Ошондуктан $\Delta=W(x)\neq 0$ шарты орун алат жана бул системадан $s_1(\xi),...,s_n(\xi)$ чоңдуктары бир маанилүү аныкталат. Бул чоңдуктардын маанилерин тапкандан кийин $l_k(\xi)$ жана $q_k(\xi)$ чоңдуктарын табуу керек. Ал үчүн

$$A_k(y)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{ki}(x)y^{(i)}(a), \quad B_k(y)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{ki}(x)y^{(i)}(b)$$

белгилөөлөрүн жүргүзүп (1.3.2) чектик шарттарын

$$V_k(y)=A_k(y)+B_k(y), k=1,2,3,...,n$$

түрүндө жазабыз. $G(x,\xi)$ функциясынын 4^0 касиетинин негизинде

$$V_k(G)=\sum_{i=0}^{n-1}q_i(\xi)A_k(y_i)+\sum_{i=0}^{n-1}l_i(\xi)B_k(y_i)=0, \quad k=1,2,3,...,n,$$

барабардыктарына ээ болобуз. Бул барабардыктарды жогорудагы

$$q_i(x)=l_i(x)-s_i(x), \quad i=1,2,3,...,n, \tag{1.3.6}$$

барабардыктарынын негизинде

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(l_i(\xi)-q_i(\xi)\right)A_k(y_i)+\sum_{i=0}^{n-1}l_i(\xi)B_k(y_i)=0, \quad k=1,2,3,...,n,$$

түрүндө же

$$\sum_{i=1}^{n}l_i(\xi)V_k(y_i)=\sum_{i=1}^{n}s_i(\xi)A_k(y_i), \quad k=1,2,3,...,n, \tag{1.3.7}$$

түрүнө келтирип жазабыз. (1.3.7) системасын $l_1(\xi),...,l_n(\xi)$ чоңдуктарына карата сызыктуу бир тектүү эмес алгебралык система катары кароого болот. Анын негизги аныктагычы Δ үчүн (1.3.3) шартынын негизинде

$$\Delta=\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & ... & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & ... & V_2(y_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & ... & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

болгондуктан, (1.3.7) системасынан $l_1(\xi),...,l_n(\xi)$ чоңдуктары бир маанилүү аныкталат. Алардын табылган маанилери боюнча (1.3.6) барабардыктарынан $q_1(\xi),...,q_n(\xi)$ чоңдуктары да бир маанилүү аныкталат. $q_i(\xi)$ жана $l_i(\xi), \quad i=1,2,3,...,n$ чоңдуктарынын табылган маанилерин (1.3.5) барабардыгына коюп Грин функциясын аныктайбыз. Жогорудагы эсептөөлөрдөн Грин функциясы бир маанилүү аныкталарын б.а. жалгыз болоорун жана аны тургузуунун жолун көрөбүз.

Грин функциясы

$$L[y] \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n y = f(x), \qquad (1.3.8)$$

теңдемесинин (1.3.2) чектик шарттарын канааттандырган чыгарылышын табууда колдонулат.

ТЕОРЕМА. Эгерде $G(x,\xi)$ функциясы (1.3.1)-(1.3.2) чектик маселесинин Грин функциясы болсо, анда (1.3.8) теңдемесинин (1.3.2) чектик шарттарын канааттандырган чыгарылышы

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (1.3.9)$$

барабардыгы боюнча аныкталат.

Теореманын тууралыгы экинчи тартиптеги теңдемелер үчүн далилденгендиктен бул жерде далилдөөсүз эле кабыл алабыз.

ЭКИНЧИ БӨЛҮМ

2.1 ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН АЙРЫМ УЧУРУНДА ГРИН ФУНКЦИЯСЫН ТУРГУЗУУ

Төмөнкү чектик маселе үчүн

$$y''' + \alpha_1 y'' + \alpha_2 y' + \left(\alpha_3 - \frac{1}{a_0}\right) y = 0 \qquad (2.1.1)$$

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = 0 \qquad (2.1.2)$$

$G(x,\xi)$ Грин функциясын тургузалы.

Мында $\alpha_{1,}\alpha_{2,}\alpha_{3,}a_0$ -туруктуу сандар. Бул (2.1.1) дифференциалдык теңдеменин мүнөздөгүч теңдемеси

$$\mu^3 + \alpha_1\mu^2 + \alpha_2\mu + \left(\alpha_3 - \frac{1}{a_0}\right) = 0, \qquad (2.1.3)$$

болот.

Бул (2.1.3) теңдемеде

$$\mu = \lambda - \frac{\alpha_1}{3} \qquad (2.1.4)$$

коюп,

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0 \qquad (2.1.5)$$

теңдемесин алабыз.

Мында

$$p = \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{3},$$

$$q = \left(\alpha_3 - \frac{1}{a_0}\right) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{3} + \frac{2}{27}\alpha_1^3$$

Эми

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0,$$

б.а.

$$\frac{1}{4}\left[\left(\alpha_3-\frac{1}{a_0}\right)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{2}{27}\alpha_1{}^3\right]^2+\frac{1}{27}\left[\alpha_2-\frac{\alpha_1{}^2}{3}\right]^3=0$$

шарты аткарылсын.

Анда Карданонун формуласы боюнча (2.1.5) тен

$$\mu_1=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\qquad \mu_2=\mu_{3=}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \tag{2.1.6}$$

Эми (2.1.6) менен (2.1.4)тү эске алсак, анда

$$\begin{aligned}\mu_1&=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}-\frac{\alpha_1}{3},\\ \mu_2&=\mu_{3=}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}-\frac{\alpha_1}{3}\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

келип чыгат. Демек төмөнкү функциялар

$$y_1(x)=e^{\mu_1 x},\qquad y_2(x)=e^{\mu_2 x},\qquad y_3(x)=xe^{\mu_2 x},$$

(2.1.1) теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары болушат.

Эми (2.1.1)-(2.1.2) чектик маселенин Грин функциясын

$$G(x,\xi)=\begin{cases}c_1(\xi)e^{\mu_1 x}+c_2(\xi)e^{\mu_2 x}+c_3(\xi)e^{\mu_2 x},0\le x\le\xi\le 1,\\ c_1^*(\xi)e^{\mu_1 x}+c_2^*(\xi)e^{\mu_2 x}+c_3^*(\xi)e^{\mu_2 x},0\le\xi\le x\le 1,\end{cases} \tag{2.1.8}$$

түрүндө изилдейбиз

$$G'_x(x,\xi)=\begin{cases}c_1(\xi)\mu_1e^{\mu_1 x}+c_2(\xi)\mu_2e^{\mu_2 x}+c_3(\xi)(1+\mu_2x)e^{\mu_2 x},0\le x\le\xi\le 1,\\ c_1^*(\xi)\mu_1e^{\mu_1 x}+c_2^*(\xi)\mu_2e^{\mu_2 x}+c_3^*(\xi)(1+\mu_2x)e^{\mu_2 x},0\le\xi\le x\le 1,\end{cases} \tag{2.1.9}$$

$$G''_{xx}(x,\xi)=\begin{cases}c_1(\xi)\mu_1^2e^{\mu_1 x}+c_2(\xi)\mu_2^2e^{\mu_2 x}+c_3(\xi)(2\mu_2+\mu_2^2x)e^{\mu_2 x},0\le x\le\xi\le 1,\\ c_1^*(\xi)\mu_1^2e^{\mu_1 x}+c_2^*(\xi)\mu_2^2e^{\mu_2 x}+c_3^*(\xi)(2\mu_2+\mu_2^2x)e^{\mu_2 x},0\le\xi\le x\le 1,\end{cases} \tag{2.1.10}$$

Анда (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10)ду

$$\begin{cases} 1) G(0,\xi)=0 \Rightarrow c_1(\xi)+c_2(\xi)=0; \\ 2) G'_x(0,\xi)=0 \Rightarrow c_1(\xi)\mu_1+c_2(\xi)\mu_2+c_3(\xi)=0; \\ 3) G'_x(1,\xi)=0 \Rightarrow c_1^*(\xi)\mu_1 e^{\mu_1}+c_2^*(\xi)\mu_2 e^{\mu_2}+c_3(\xi)=0; \\ 4) G(\xi^-,\xi)=G(\xi^+,\xi) \Rightarrow c_1(\xi)e^{\mu_1\xi}+c_2(\xi)e^{\mu_2\xi}+c_3(\xi)\xi e^{\mu_2}=c_1^*(\xi)e^{\mu_1\xi}+c_2^*(\xi)e^{\mu_2\xi}+c_3^*(\xi)\xi e^{\mu_2\xi}; \\ 5) G'_x(\xi^-,\xi)=G'_x(\xi^+,\xi) \Rightarrow c_1(\xi)\mu_1 e^{\mu_1\xi}+c_2(\xi)\mu_2 e^{\mu_2\xi}+c_3(1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi}= \\ =c_1^*(\xi)\mu_1 e^{\mu_1\xi}+c_2^*(\xi)\mu_2 e^{\mu_2\xi}+c_3^*(\xi)(1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi}; \\ 6) G''_{xx}(\xi^+,\xi)-G''_{xx}(\xi^-,\xi)=1 \Rightarrow c_1^*(\xi)\mu_1^2 e^{\mu_1\xi}+c_2^*(\xi)\mu_2^2 e^{\mu_2\xi}+c_3^*(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi}- \\ -\left[c_1(\xi)\mu_1^2 e^{\mu_1\xi}+c_2(\xi)\mu_2^2 e^{\mu_2\xi}+c_3(\xi)(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi}\right]=1; \end{cases} \quad (2.1.11)$$

түрүндө жазып алабыз.

(2.1.11)ден төмөнкү (2.1.12) жана (2.1.13)тү алабыз

$$\begin{cases} c_2(\xi)=-c_1(\xi); \\ (\mu_1-\mu_2)c_1(\xi)+c_3(\xi)=0, \Rightarrow c_3(\xi)=(\mu_2-\mu_1)c_1(\xi); \\ c_1^*(\xi)\mu_1 e^{\mu_1}+c_2^*(\xi)\mu_2 e^{\mu_2}+c_3^*(\xi)(1+\mu_2\xi)e^{\mu_2}=0. \end{cases} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{cases} \left[c_1(\xi)-c_1^*(\xi)\right]e^{\mu_1\xi}+\left[c_2(\xi)-c_2^*(\xi)\right]e^{\mu_2\xi}+\left[c_3(\xi)-c_3^*(\xi)\right]\xi e^{\mu_2\xi}=0; \\ \left[c_1(\xi)-c_1^*(\xi)\right]\mu_1 e^{\mu_1\xi}+\left[c_2(\xi)-c_2^*(\xi)\right]\mu_2 e^{\mu_2\xi}+\left[c_3(\xi)-c_3^*(\xi)\right](1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi}=0; \\ -\left[c_1(\xi)-c_1^*(\xi)\right]\mu_1^2 e^{\mu_1\xi}-\left[c_2(\xi)-c_2^*(\xi)\right]\mu_2^2 e^{\mu_2\xi}-\left[c_3(\xi)-c_3^*(\xi)\right](2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi}=1. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Бул (2.1.13) системага $c_1(\xi)-c_1^*(\xi)$, $c_2(\xi)-c_2^*(\xi)$, $c_3(\xi)-c_3^*(\xi)$ ге карата Крамердин формуласы менен чыгарабыз

$$\Delta(\xi)=\begin{vmatrix} e^{\mu_1\xi} & e^{\mu_2\xi} & \xi e^{\mu_2\xi} \\ \mu_1 e^{\mu_1\xi} & \mu_2 e^{\mu_2\xi} & (1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi} \\ -\mu_1^2 e^{\mu_1\xi} & -\mu_2^2 e^{\mu_2\xi} & -(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(\xi)=\begin{vmatrix} 0 & e^{\mu_2\xi} & \xi e^{\mu_2\xi} \\ 0 & \mu_2 e^{\mu_2\xi} & (1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi} \\ 1 & -\mu_2^2 e^{\mu_2\xi} & -(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(\xi)=\begin{vmatrix} e^{\mu_1\xi} & 0 & \xi e^{\mu_2\xi} \\ \mu_1 e^{\mu_1\xi} & 0 & (1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi} \\ -\mu_1^2 e^{\mu_1\xi} & 1 & -(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi} \end{vmatrix}, \quad (2.1.14)$$

$$\Delta_3(\xi)=\begin{vmatrix} e^{\mu_1\xi} & e^{\mu_2\xi} & 0 \\ \mu_1 e^{\mu_1\xi} & \mu_2 e^{\mu_2\xi} & 0 \\ -\mu_1^2 e^{\mu_1\xi} & -\mu_2^2 e^{\mu_2\xi} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1(\xi)-c_1^*(\xi)=\dfrac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}, \\ c_2(\xi)-c_2^*(\xi)=\dfrac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, \\ c_3(\xi)-c_3^*(\xi)=\dfrac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)}. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

болот. Бул (2.1.15) тен

$$\begin{cases} c_1^*(\xi)=c_1(\xi)-\dfrac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}, \\ c_2^*(\xi)=c_2(\xi)-\dfrac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, \\ c_3^*(\xi)=c_3(\xi)-\dfrac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)}. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Эми (2.1.16)ны (2.1.12)ге койобуз

$$\begin{cases} c_1(\xi)+c_2(\xi)=0, \\ c_1(\xi)\mu_1+c_2(\xi)\mu_2+c_3(\xi)=0, \\ c_1(\xi)\mu_1 e^{\mu_1}+c_2(\xi)\mu_2 e^{\mu_2}+c_3(\xi)(1+\mu_2)e^{\mu_2}= \\ =c_1(\xi)e^{\mu_1}\dfrac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}+c_2(\xi)e^{\mu_2}\dfrac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}+c_3(\xi)(1+\mu_2)e^{\mu_2}\dfrac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)} \end{cases} \tag{2.1.17}$$

(2.1.17) системаны $c_1(\xi), c_2(\xi), c_3(\xi)$ ге карата Крамердин формуласы менен чыгарабыз

$$\overline{\Delta}(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 e^{\mu_1} & \mu_2 e^{\mu_2} & (1+\mu_2)e^{\mu_2} \end{vmatrix},$$

$$\overline{\Delta_1}(\xi)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ Z & \mu_2 e^{\mu_2} & (1+\mu_2)e^{\mu_2} \end{vmatrix}, \tag{2.1.18}$$

$$\overline{\Delta_2}(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 1 \\ \mu_1 e^{\mu_1} & Z & (1+\mu_2)e^{\mu_2} \end{vmatrix}, \tag{2.1.18}$$

$$\overline{\Delta_3}(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \mu_1 e^{\mu_1} & \mu_2 e^{\mu_2} & Z \end{vmatrix},$$

Анда

$$c_1(\xi)=\frac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}; \qquad c_2(\xi)=\frac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)} \qquad c_3(\xi)=\frac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)} \tag{2.1.19}$$

Эми (2.1.19) ду (2.1.16) га коюп $c_1^*(\xi), c_2^*(\xi), c_3^*(\xi)$лерди табабыз

$$\begin{cases} c_1^*(\xi)=\dfrac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\dfrac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}, \\ c_2^*(\xi)=\dfrac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\dfrac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, \\ c_3^*(\xi)=\dfrac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\dfrac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)}. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Бул (2.1.19) менен (2.1.20) ны (2.1.8) ге коюп Грин функциясын аныктайбыз

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_1 x}+\dfrac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_2 x}+\dfrac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_2 x}, 0\le x\le\xi\le 1,\\ \left(\dfrac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\dfrac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_1 x}+\left(\dfrac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\dfrac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_2 x}+\\ +\left(\dfrac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\dfrac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_2 x}, 0\le\xi\le x\le 1\end{cases}$$

2.2 ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

Тескери маселенин коюлушу жана изилдениши.

Төмөнкү шарттарды канаатандырган

$u(t,x) \in C^{(1,3)}(G)$ жана $\varphi_i(t) \in C[0,T]$ $(i=1..n)$ функцияларын

$$u_t(t,x) = a_0(Au)_t(t,x) + a_1(Au)(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) f_i(t,x) + F(t,x), \quad \forall (t,x) \in G \qquad (2.2.1)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,1], \qquad (2.2.2)$$

$$u(t,0) = u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \ t \in [0,T], \qquad (2.2.3)$$

$$u(t,x_i) = g_i(t), 0<x_1<x_2< \ldots <x_n<1, \qquad (2.2.4)$$

табуу тескери маселесин карайлы.

Мында $Au = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 u$, $b_0(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$, $b_3(t,x)$, c, $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $g_i(t) \in C^1[0,T]$ белгилүү функциялар.

$u(t,x)$ чыгарылышы үчүн

$$u_0(0) = u_0'(0) = u_0'(1) = 0, \ g_i(0) = u_0(x_i), \quad i = 1..n. \qquad (2.2.5)$$

макулдашылган шарттары аткарылсын. Ошондой эле

$$\frac{1}{4}\left[\left(\alpha_3 - \frac{1}{a_0}\right) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{3} + \frac{2}{27}\alpha_1^3\right]^2 + \frac{1}{27}\left[\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{3}\right]^3 = 0 \qquad (\gamma)$$

шарты аткарылсын.

Жаңы белгисиз функция киргизебиз

$$u_t(t,x) = v(t,x). \qquad (2.2.6)$$

Анда

$$u(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+u_0(x).$$

А оператору менен интегралдык оператордун комутативдигин жана (2.2.6) ны колдонуп, (2.2.1) теңдемени төмөнкү түрүндө жазып алсак болот

$$v(t,x)=a_0(Av)(t,x)+a_1\int_0^t Av(s,x)ds+a_1(Au_0)(x)+\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\, f_i(t,x)+F(t,x). \qquad (2.2.7)$$

Чектик шарттарын төмөнкү түрүндө берилет

$$v(t,0)=v_x(t,0)=v_x(t,1)=0 \qquad (2.2.8)$$

(2.2.7) теңдемесин төмөнкү түрдө жазып алабыз.

$$Av=-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds+\frac{1}{a_0}v-\frac{a_1}{a_0}Au_0(x)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\, f_i(t,x)-\frac{1}{a_0}F(t,x),$$

Белгисиз $Av(x,t)$ га карата, $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$ ядросунун $R(t,s)=-\frac{a_1}{a_0}\exp\left(-\frac{a_1}{a_0}(t-s)\right)$ резольвентасын колдонуп, чыгарабыз,

$$Av(t,x)-\frac{1}{a_0}v(t,x)=-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\, f_i(t,x)+$$
$$+\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)v(s,x)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t R(t,s)\,\varphi_i(s)\, f_i(s,x)\,ds+F_1(t,x), \qquad (2.2.9)$$

мында

$$F_1(t,x)=-\frac{a_1}{a_0}Au_0(x)-\frac{1}{a_0}F(t,x)-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t R(t,s)Au_0(x)ds-\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)F(s,x)ds.$$

Интегралдоо үчүн Дирихленин формуласын колдонуп, (2.2.9) барабардыгын төмөнкү түрүндө жазып алабыз

$$Av(t,x)-\frac{1}{a_0}v(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)v(s,x)ds-$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\, f_i(t,x)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t R(t,s)\varphi_i(s)\, f_i(s,x)ds+F_1(t,x). \qquad (2.2.10)$$

Эгерде азырынча (2.2.10)-дун оң жагын белгилүү функция катарында кабыл алсак, анда (2.2.10) бул үчүнчү тартиптеги бир тектүү эмес жөнөкөй дифференциалдык теңдеме, жана ал төмөнкү теңдемеге эквиваленттүү

$$v(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\int_0^t R(t,s)v(s,\xi)dsd\xi-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 G(x,\xi)\,\varphi_i(t)\,f_i(t,\xi)d\xi-$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 G(x,\xi)\int_0^t R(t,s)\varphi_i(s)\,f_i(s,\xi)dsd\xi+\int_0^1 G(x,\xi)F_1(t,\xi)d\xi \qquad (2.2.11)$$

Мында $G(x,\xi)$ - Гриндин функциясы, б.а.

$$y'''+\alpha_1 y''+\alpha_2 y'+\left(\alpha_3-\frac{1}{a_0}\right)y=0$$
$$y(0)=y'(0)=y'(1)=0$$

четтик маселенин Грин функциясы.

Бул учурда (γ) шартынын жана Карданонун формуласынын негизинде

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_1 x}+\frac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_2 x}+\frac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_2 x}, 0\le x\le\xi\le 1,\\ \left(\frac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\frac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_1 x}+\left(\frac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\frac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_2 x}+\\ +\left(\frac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\frac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_2 x}, 0\le\xi\le x\le 1,\end{cases} \qquad (2.2.12)$$

болот.

Жазууну жөнөкөйлөтүү үчүн белгилөөлөрдү киргизип алабыз

$$K_i(s,t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)\,f_i(s,\xi)d\xi\,,$$

$$P_i(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\,f_i(t,\xi)d\xi\,,\ \text{i}=1..\text{n}, \qquad (2.2.13)$$

$$F_2(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_1(t,\xi)d\xi\,.$$

Анда (2.2.11)-ди төмөнкү түрдө жазып алабыз

$$v(t,x)+\sum_{i=1}^{n}P_i(t,x)\varphi_i(t)=\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(s,t,x)\varphi_i(s)ds+F_2(t,x). \qquad (2.2.14)$$

(2.2.4) кошумча шарттын колдонуп, (2.2.14)-төн

$$\sum_{j=1}^{n}P_j(t,x_i)\varphi_j(t)=\int_0^t\int_0^1 G(x_j,\xi)\frac{1}{a_0}R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t K_j(s,t,x_i)\varphi_j(s)ds+F_2(t,x_i)-g_i'(t), \qquad i=1..n. \qquad (2.2.15)$$

тендемесин алабыз .

(2.2.1)-(2.2.4) маселесинин чыгарылышы $C^{1,3}(G)\times C_n[0,T]$ мейкиндигинде (2.2.14)-(2.2.15) канаатандырат.

Эгерде (2.2.14)-(2.2.15) чыгарылышы жашаса, анда $v(t,x)$ Грин функциянын касиети боюнча (2.2.8) шарттарын канаатандырат.

Ошентип, $(n+1)$ - белгисиз менен, $n+1$ сызыктуу интегралдык теңдемелерден, (2.2.1)-(2.2.4) тескери маселеси (2.2.14)-(2.2.15) системасына эквиваленттүү жана төмөнкү вектор түрүндө жазып алсак болот.

Эми төмөнкү

$$\begin{vmatrix} P_1(t,x_1) & P_2(t,x_1)\cdots & P_n(t,x_1) \\ P_1(t,x_2) & P_2(t,x_2)\cdots & P_n(t,x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_1(t,x_n) & P_2(t,x_n)\cdots & P_n(t,x_n) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t\in[0,T], \qquad (2.2.16)$$

шарты аткарылсын дейли.

Анда (2.2.14)-(2.2.15) система Вольтерранын экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы болот.

Ошентип, төмөнкү теорема далилденди.

ТЕОРЕМА. Мейли төмөнкү шарттар аткарылсын:

а) $b_0(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$, $b_3(t,x)$, $f_i(t,x)$, $F(t,x)$ $\in$C(G), $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $g_i(t)\in C^1[0,T]$;

б) (2.2.5), (γ), (2.2.16).

Анда (2.2.1)-(2.2.4) тескери маселеси $\{u(t,x),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\}$ $C^{1,3}(G)\times C_n[0,T]$ мейкиндигинен жалгыз чыгарылышка ээ.

ЖЫЙЫНТЫК

Бул иште төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселеси каралды. Тескери маселе теңдемедеги убакыттан көз каранды болгон белгисиз функцияларды ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат экенин көрсөтүлдү. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденди.

АДАБИЯТТАР

[1] Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 183 с., 2001.

[2] Аблабеков, Бактыбай. Обратные Задачи для Дифференциальных Уравнений Третьего Порядка. Бишкек: Lap Lambert, 301 с., 2011.

[3] Аблабеков, Бактыбай. Обратные Задачи для Дифференциальных Уравнений Третьего Порядка. Бишкек: Lap Lambert, 281 с, 2013.

[4] Асанов, А. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения // Сиб. мат. журн. 36(4) (1995): 752-762.

[5] Асанов А., Атаманов Э.Р., ”Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения”, Сибирский математический журнал, 34(4) (1995).(SCI)

[6] Асанов А., Атаманов Э.Р., ”Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдогиперболического уравнения”, Исслед.по инт.-дифф, уравнениям, Бишкек, Илим, 28 (1999): 97-113.

[7] Асанов А., Нышанова З.Э.”Обратные задачи для псевдопараболических уравнений пятого порядка”, Manas Universitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 2(2002):1-13.

[8] Асанов А., Матанова К.Б.,” Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка”, Труды XIII Байкальской междунар. школы семинара, Иркутск, 3 (2005):30-35.

[9] Асанов А.,Матанова К.Б.,” О существовании и единственности решения одной обратной задачи”, Вестник Каз НУ, сер.мат., мех., инф., 56(1) (2008): 56-62.

[10] Асанов А., Сулайманов Б.Э.,” Об одной обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения”, Исслед.по инт.-дифф, уравнениям, Бишкек, Илим, 29 (2000):105-110.

[11] Атаманов Э.Р. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. - Фрунзе: Илим, 101с., 1990.

[12] Ашырбаев У. Псевдогиперболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер. Дипломная работа. КТУ Манас. Факультет естественных наук, Бишкек, 2016.

[13] Бухгейм, Александр. Введение в Теорию Обратных Задач. Новосибирск: Наука, 184с., 1983.

[14] Керимбеков А., Абыдылдаева Э., Дифференциалдык теңдемелер: теория жана мисалдар, колдонмо программалар. – Бишкек: Maxprint.320c. 2017.

[15] Лаврентьев Михаил, Владимир РОМАНОВ. Некорректные Задачи Математической Физики и Анализа. Наука, 288 с. 1980.

[16] Матанова, К.Б. Об одной обратной задаче для псевдопараболического уравнения// Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат.науки. 2 (1999):137-145

[17] Матанова К.Б., Мамытов А.О. “Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка”, Исслед. по интегро-диф. уравнениям, 47 (2014): 147-151.

[18] Матанова К.Б. “Об одной обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка”, Исслед. по интегро-диф. уравнениям, 38 (2008): 118-124.

[19] Матанова К.Б. “Обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка”, Вестник ОшГУ, 4 (2001): 94-100.

[20] Матанова К.Б., Темиров Б.К. Обратная задача об источнике для дифференциального уравнения третьего порядка с частными производными // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XLVII междунар. науч.-практ. конф. № 10(45). – Новосибирск: СибАК, 2016. – С. 45-59.

[21] Мегралиев Я.Т., Шафиева Г.Х., Матанова К.Б. “Обратная краевая задача с интегральным условием для псевдопараболического уравнения четвертого порядка”, Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. 2 (2012): 45-52.

[22] Романов, Владимир. Обратные Задачи для Математической Физики.Наука, 264с. 1984.

[23] Asanov A., Atamanov E.R.,” Recowery kernel for an integro-differential pseudoparabolic operatos equations”, Journal of inverse and ILL-Posed Problems, Moscow, 3,(1995).

[24] Asanov A., Atamanov E.R.,” An inverse problem for a pseudoparabolic operator equations ”, Journal of Inverse and ILL-Posed Problems, Moscow, 2,(1994).

[25] Asanov A., Atamanov E.R.,” Nonclassical and inverse problems for pseudoparabolic equations”, VSP, Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, (1997) 152p.

ӨМҮР БАЯН

Жеке маалыматтар:

Аты, Фамилиясы:	Улан Ашырбаев
Улуту:	кыргыз
Туулган жылы / жери:	1993-ж./ Бишкек ш.
Үй - бүлөсү:	никеси бар
Тел:	+996559408055
e-mail:	ulan.ashyrbaev@mail.ru

Академиялык билими:

Даражасы	**Курум**	**Бүтүргөн жылы**
Магистратура	КТУ “МАНАС”	……….
Бакалавр	КТУ “МАНАС”	2016
Лицей	ПК МУК	2011

Стаж:

Жылы	**Мекеме**	**Милдети**
2017 -	Орто мектеп-лицей № 74	Мугалим

Билген тилдер:

Кыргыз тили (Эне тили)

Орус тили

Түрк тили

Англис тили

Ашырбаев Улан