KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

VOLTERRA III.CİNS LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER SİSTEMİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Nasıykat ARZIBAYEVA

BİŞKEK 2010

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

VOLTERRA III.CİNS LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER SİSTEMİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Nasıykat ARZIBAYEVA

Danışman

Prof.Dr.Avıt ASANOV

BİŞKEK 2010

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü'nün ..../......../...... tarih ve ....sayılı toplantısında oluşturulan jüri, Lisansüstü Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ..... maddesine göre Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi 0751Y03002 nolu Nasıykat Arzıbayevanın "Volterra III.cins lineer integral denklem sistemini Volterra II.cinse indirgeyerek çözme" konulu tezini incelemiş ve aday ....../....../...... tarihinde, saat .... da jüri önünde tez savunmasına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini savunmasından sonra .... dakikalık süre içinde gerek tez konusu ve tezi gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından jüri üyelerinin sorularına verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin Reddine/Kabulüne/Düzeltilmesine oy birliği/çokluğu ile karar verildi.

ÖZ

Yazar : Nasiykat ARZIBAYEVA

Üniversite : Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi

Anabilim Dalı : Fen Bilimleri

Bilim Dalı : Matematik

Tezin Niteliği : Yüksek Lisans Tezi

Sayfa Sayısı : IX+21

Mezuniyet Tarihi : Mayıs 2010

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Avıt Asanov

VOLTERRA III.CİNS LİNEER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİ VOLTERRA II.CİNSE İNDİRGEYEREK ÇÖZME

Uygulamalı bilim dallarında, bilhassa fizik ve mühendislik dalının bir çok problemlerinde integral denklemlerle karşılaşılır. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi daha zor denklemlerdir. Integral denklemler sınıflandırması içinde Volterra integral denklem sistemi mevcuttur ve uygulamalı matematikte karşılaşılan problemlerin bazılarına çözüm üretme ve mühendislerin karşılaşacağı problemlere altyapı oluşturma amacını taşır. Sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. I.cins, II.cins integral denklem sistemlerinin çözümü için birkaç standart yöntem mevcuttur (Taylor polinom yöntemi gibi) , fakat Volterra III.cins integral denklem sisteminin çözümü ile ilgili literatürde pek fazla çalışma yoktur. Bu nedenle Volterra III.cins integral denklem sisteminin kısmen de olsa incelenmesinin faydalı olacağı düşünülmüştür.Bu tez çalışmasındaki amaç verilen III. Cins Volterra integral denklemini II.cins Volterra integral denklemine indirgeyek çözüm bulmak. Yöntem; sistemleri bir matris denkleme dönüştürmeye dayanmaktadır.

Anahtar sözcükler: Volterra integral denklemi, çekirdek fonksiyon, rank, matris, türev , lineer

КЫСКАЧА МАЗМУУНУ

Даярдаган : Насыйкат АРЗЫБАЕВА

Университет : Кыргызстан-Туркия Манас Университети

Институт : Табигий Илимдер Институту

Багыты : Математика

Иштин сыпаты : Магистрстура

Беттердин саны : IX+21

Бүтүрүү датасы : Май 2010

Диссертация жетекчиси : Проф.Др.Авыт Асанов

Волтерранын III.түрдөгү сызыктуу интеграл теңдемесин II.түргө келтирип чыгаруу

Математика кеңири колдонулган билим тармактарында, айрыкча физика жана инженердик тармакта интегралдык теңдемелерди көп кездештиребиз. Интеграл теңдемесин эсептөө абдан татаал болгон учурлар болот. Интеграл теңдемесинин жогорку же төмөнкү чектеринин биреөсүндө x өзгөрмөсу колдонулган учурда бул интегралдык теңдеме Волтерранын интеграл теңдемеси деп аталат жана инженердик тармактагы практикалык проблемарды эсептеп чыгарууда маанилүү роль ойнойт. I. түрдөгү жана II. түрдөгү интеграл теңдемесин эсептеп чыгарууда бир канча классикалык методдор колдонулат (Тейлор көпт үк мүчө сыяктуу) , ал эми Волтерранын III. түрдөгү интеграл теңдеме системасын эсептеп чыгаруу методу азыркы учурда кеңири карала элек. Мына ошондуктан Волтерранын III. түрдөгү интеграл теңдеме системасын жалпы болбосо да айрым учурун колго алууну пайдалуу деп ойлодум. Бул илимий кагаз ишинде Волтерранын III.түрдөгү интеграл теңдеме системасын II.түргө келтирип чыгаруу маселеси каралды жана белгилүү шарттар коюлуп , системаны матрица системасына өткөрүү методу колдонулуп, суроонун жалгыз чыгарылышы табылды.

Ачкыч сөздөр: Волтерра интегралдык теңдемеси, ядро функция, резольвента, матрица ,ранг, туунду, интеграл

ABSTRACT

Prepared by : Nasıykat ARZIBAYEVA

University : Kyrgyzstan-Turkey Manas University

Institute : Natural Sciences

Department : Mathematics

Thesis Level : Master Thesis

Number of Pages : IX + 21

Graduate Date : May 2010

Thesis Advisor : Prof.Dr. Avit Asanov

Solving the system of Volterra Linear Integral equations of the III.kind by reducing it to the II.kind.

There has been a big interest on the integral equations since they are the mathematical model of many evolutionary problems arising from many parts of applied mathematics i.e from biology, chemistry, physics and engineering**.** When one of the limits, lower or upper, contain x as a variable these integral equations are called Volterra integral equations and they are widely used to solve the problems arising from population dynamics, epidemic diffusion, viscoelasticity and feedback control theory. The classical methods have been used to find the solution of Volterra equations of the I. and II.kind, but however the system of Volterra integral equations of the III.kind has not been widely considered yet. Therefore, I want to work on the special case of the Volterra linear integral equations of the III.kind. In this paper, the system of Volterra integral equations has been reduced to the II.kind, some conditions are accepted, the system is interpreted into a matrix system and the unique solution is obtained.

Keywords: Volterra integral equations, kernel, resolvent, rank, matrix, differentiate

ÖNSÖZ

Gerek lisans eğitimi ve gerek yüksek lisans eğitimi sürecinde integral denklemlerle sıkça karşılaştığım için Volterra İntegral denkleminin kullanım alanını merak ettim ve uygulamalı matematik başta olmak üzere mühendislik ve benzeri bir çok alanda kulanıldığını öğrendim. Mesela biyoloji, kimya, fizik, mühendislik ve tıptaki gelişmeleri matematiksel modelleştirme adına Volterra integral denklemine ihtiyaç gün geçtikçe daha da artmıştır. Yukarıdaki belirtilen alanlardaki problemler I.cins, II.cins ve III.cins integral denklemlerine indirgenerek çözüm bulunmaya çalışılagelmiştir.

İki yıllık yüksek lisans eğitimi programı kapsamında ilk yıl I.cins ve II.cins integral denklemler üzerinde duruldu, inceleme yapıldı ve bir takım standart metodlar kullanılarak çözümler elde edilmeye çalışıldı. Integral denklemler konusu geniş alanda öğrenerek , denklem çözme yeteneğimizi geliştirmeye çalıştık. İkinci eğitim yılında danışman hocamla Volterra III.cins integral denklem sistemi üzerine çalışma yapmaya karar verdim .Bu çalışmada ise Volterra III.cins integral denklemi II.cinse indirgenerek tek çözüm elde edilmeye çalışıldı.

Bana bu ilginç konuyu öneren ve çalışma ve araştırma sürecinde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr.Avıt Asanov'a teşekkürlerimi sunmak istiyorum.

Bişkek 2010 Nasıykat ARZIBAYEVA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SEMBOLLER LİSTESİ

$\int_{t_0}^{t} u(s)ds$	$u(s)$ fonksiyonuna göre integral alma
$\forall$	her hangi bir
$\exists$	en az bir
$\frac{\partial}{\partial t} f(t)$	$f(t)$ fonksiyonunun t'ye göre türevi
$[t_0, T]$	t_0 , T kapalı aralığı
$C\,[t_0, T]$	$[t_0, T]$ aralığındaki bütün sürekli fonksiyonlar uzayı
$C\,[G]$	G aralığındaki bütün sürekli fonksiyonlar uzayı
rank A	A matrisinin rankı
$\Leftrightarrow$	ancak ve ancak

GİRİŞ

Matematikte ve fizik, mühendislik vs gibi uygulamalı bilim dallarında bir çok problemler integral denklemlerle ifade edilirler. İntegral denklemlerle ilk uğraşılar 19.yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Abel 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak İntegral denklem deyimini Du Bois Reymond'un 1888'de yayınlanan bir çalışmasında önerdiği bilinmektedir. Bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemlere integral denklemler denir. Genellikle karşılaşılan diferansiyel denklemler ise, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Türev, fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanarak bulunduğundan, diferansiyel denklemler lokal (yerel) denklemlerdir. İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir ve genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir.

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir. Lineer ve lineer olmayan integral denklemler, tekil ve tekil olmayan lineer integral denklemler, homojen ve homojen olmayan integral denklemler, integral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması**,** Volterra ve Fredholm integral denklemleri.

Bu çalışmada Volterra III.cins lineer integral denklem sistemi ele alınarak, belli koşullar öne sürülerek Volterra III.cins integral denklemi II.cinse indirgenerek tek çözüm elde edilmeye çalışılacak.

Çalışma giriş, birinci, ikinci ve üçüncü bölüm, sonuç,özet ve kaynaklardan oluşmaktadır.Birinci bölümde integral denklemlerin farklı özelliklerine göre sınıflandırılması yaplımıştır. İkinci bölümde Volterra integral denklem sisteminin çözümü için gerekli koşullar için kullanılacak matrisin rankı ve Kronecker-Capelli teoremi açıklanmıştır. Üçüncü bölümde genel Volterra integral denklemi için tanım, teorem ve lemma verilmiştir ve Volterra III.cins lineer integral denklem sistemi üzerinde işlem yapılmıştır ve verilen denklem sistemi matris sistemine dönüştürme metodu kullanılarak tek çözüm elde edilmeye çalışılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.Lineer ve lineer olmayan integral denklemler, tekil ve tekil olmayan lineer integral denklemler, homojen ve homojen olmayan integral denklemler, integral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması**,**Volterra ve Fredholm integral denklemleri.

Son iki sınıflandırmayı ele alacağız.

1.1 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır.

1.1.1 I. cins integral denklemler

Bilinmeyen fonksiyon u(x), çekirdek fonksiyon K(x,t) olmak üzere,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (1)$$

şeklindeki bir integral denkleme I. cins integral denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2)$$

şeklindeki bir integral denklem de yine I. cins integral denklemdir.
Burada da $\phi(x)$ ve f(x) bilinen fonksiyonlardır. Ancak bu denklemler,

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (3)$$

şeklinde ifade edilerek (1) yapısında yazılabilir.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt \qquad (4)$$

ve $$e^{x} = x - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 t u(t)dt \tag{5}$$

gibi denklemler, I. cins integral denklemlere birer örnektir.

1.1.2 II. cins integral denklemler

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{6}$$

veya $$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{7}$$

şeklindeki integral denklemler ise II. cins integral denklemler sınıfına girmektedir. Görüldüğü gibi, bilinmeyen u(x) fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır.

$$u(x) = \int_0^x e^{x+t} u(t)dt \tag{8}$$

ve $$u(x) = 1 + x + \int_0^2 \sin(x+t)u(t)dt \tag{9}$$

bu tür denklemlere birer örnektir.

1.1.2 III. cins integral denklemler

Bu iki cins integral denklemden başka $\phi(x)$, f(x) ve K(x,t) fonksiyonları bilinen,

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{10}$$

şeklindeki integral denklemlere ise III. cins integral denklemler denilir.

Örneğin, $$x.u(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt \tag{11}$$

denklemi III. cins bir integral denklemdir.

Özel olarak $\phi(x) \equiv 0$ ise (10) denklemi I. cins bir integral denkleme, $\phi(x) \equiv 1$ ise aynı denklem II. cins bir integral denkleme dönüşmektedir. Buradan I. ve II. cins integral denklemlerin, III. cins integral denklemlerin birer özel hali olduğu görülmektedir.

1.2. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakmasızın,

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) *x* değişkeni bulunmaktadır. *x* değişkeninin *x=b* gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere ise Fredholm İntegral Denklemleri denilmektedir .Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır. Ancak bu iki denklem türünün incelenmesi, zaman zaman iç içe girmiş bir görünüm verebilmektedir.

Örnek 1. Aşağıdaki

$$u(t) = \int_0^t e^{t-s} u(s)ds + e^{2t}, \quad t \in [0,1]$$

denklemini çözünüz.

Çözüm: Göründüğü gibi verilen denklem Volterra'nın II. türdeki lineer integral denklemidir.

$$\begin{cases} u(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} R(t,s) f(s)ds \\ u(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\beta(s)u(s)ds + f(t) \\ R(t,s) = \alpha(t)\beta(s)e^{\int_s^t \alpha(\tau)\beta(\tau)d\tau} \end{cases}$$ kuralından

$$\alpha(t) = e^t, \; \beta(s) = e^{-s}$$

$$R(t,s) = e^{t-s}e^{\int_s^t e^{\tau}e^{-\tau}d\tau} = e^{t-s}e^{\int_s^t d\tau} = e^{t-s}e^{t-s} = e^{2(t-s)}$$

$$u(t) = e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)}e^{2s}ds = e^{2t} + \int_0^t e^{2t}ds = e^{2t} + e^{2t}\Big|_0^t = e^{2t} + te^{2t}$$

$$u(t) = e^{2t}(t+1)$$

Örnek 2. Aşağıdaki

$$u(t) = \int_0^1 ts^2\, u(s)ds + t^2, \quad t \in [0,1]$$

denklemini çözünüz.

Çözüm: Göründüğü gibi verilen denklem Fredgolm'un II. türdeki lineer integral denklemidir.

$$u(t)=\int_0^1 ts^2u(s)ds+t^2 \qquad t\in[0,1]$$

$$u(t)=t\underbrace{\int_0^1 s^2u(s)ds}_{c_1}+t^2 \Rightarrow u(t)=tc_1+t^2$$

$$c_1=\int_0^1 s^2u(s)ds=\int_0^1 s^2(sc_1+s^2)ds=\int_0^1(s^3c_1+s^4)ds=\frac{s^4}{4}c_1+\frac{s^5}{5}\Big|_0^1=$$

$$c_1=\frac{1}{4}c_1+\frac{1}{5}\Rightarrow c_1=\frac{4}{15}\Rightarrow u(t)=\frac{4}{15}t+t^2$$

İKİNCİ BÖLÜM

2. MATRİSİN RANKI VE KRONECKER -CAPELLİ TEOREMİ

2.1 Matrisin Rankı

Tanım: Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırlar sayısına A matrisinin rankı denir ve r(A) ile gösterilir.

Örnek.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ kare matrisinin rankını bulun.

Çözüm:

A matrisinin 1. satırını 2 ile çarpıp 3.satırına ve 1.satırını -1 ile çarpıp 4.satırına ekleyelim.

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ Elde edilen matriste 3.satır ile 4.satırı yer değiştirelim.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Bu matriste 2.satırı ½ ile çarpıp 3.satıra ekleyelim.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrisinde sıfırdan farklı en az bir eleman içeren satır sayısı

üç olduğundan r(A) =3 tür.

Rank tanımından anlaşılacağı gibi, denk matrislerin rankları aynı sayıdır.

2.2 Kronecker-Capelli teoremi.

$A-m\times n$, $X-n\times 1$ ve $B-m\times 1$ matrisleri verilmiş olsun. $r=rank(A)$ ve $r_1=rank(A,B)$. O zaman

1. Eğer $r_1=r$ ise, $AX=B$ sisteminin çözümü yoktur
2. Eğer $r_1=r=n$ ise, $AX=B$ sisteminin tek çözümü vardır
3. Eğer $r_1=r<n$ ise, $AX=B$ sisteminin $n-r$ kadar parametreye bağlı çözümü vardır

Yani n bilinmeyenli m denklemden oluşan doğrusal denklemler sisteminin en az bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul sistemin matrisinin rankının genişlemiş matrisin rankına eşit olmasıdır. Sadece rank n olduğu durumda çözüm tektir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. VOLTERRA LİNEER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİ

3.1 Volterra İntegral Denklemi

Tanım 1:

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakmasızın,

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denilmektedir.

Tanım 2:

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds + f(t) \qquad t \in [t_0, T] \qquad (1)$$

$K(t,s)$-çekirdek fonksiyon, $f(t)$-bilinen fonksiyon, $u(t)$-bilinmeyen fonksiyon

$K(t,s) \in G = \{(t,s) \ : t_0 \le s \le t \le T \}$

$$R(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,\tau)\, R(t,\tau) d\tau + K(t,s)\, f(t) \qquad (t,s) \in G \qquad (2)$$

denklemini sağlayan $R(t,s)$ fonksiyonu (1).denklemin veya $K(t,s)$ fonksiyonunun rezolventi diye adlandırılır.

Tanım 3:

$K(t,s)$ fonksiyonu $K(t,s)=\alpha(t)\beta(s)$ şeklinde yazılabiliyorsa o zaman $R(t,s)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$R(t,s)=\alpha(t)\beta(s)e^{\int_s^t \alpha(\tau)\beta(\tau)d\tau}$$

Teorem 1:

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds+f(t) \qquad t\in[t_0,T] \tag{1}$$

$$R(t,s)=\int_{s}^{t} K(t,\tau)\,R(t,\tau)d\tau+K(t,s)\,f(t) \qquad (t,s)\in G \tag{2}$$

$K(t,s)$ fonksiyonu G aralığında sürekli ve $f(t)$ fonksiyonu $[t_0,T]$ aralığında sürekli ise

i) (2). denklemin C(G) uzayında tek çözümü vardır

ii) (1).denkleminin çözümünün bulunması için

$u(t)=f(t)+\int_{t_0}^{t} R(t,s)\,f(s)ds \qquad t\in[t_0,T]$ denklemi kullanılır.

Lemma1:

$\int_{t_0}^{t} K(t,s)ds \qquad t \in [t_0, T]$

$\frac{\partial}{\partial t} K(t,s) \in C[G]$, $G = \{(t,s) : t_0 \le s \le t \le T\}$ ise

o zaman $\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t_0}^{t} K(t,s)ds \right) = K(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} K(t,s)ds$

3.2 Volterra III.cins İntegral Denklem Sistemi

Volterra III.cins integral denklemi verilmiştir.

$A(t) - 2 \times 2$ matris, $K(t,s) -$ çekirdek fonksiyon, $f(t) -$ bilinen fonksiyon, $u(t) -$ bilinmeyen fonksiyon.

Ayrıca $f(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında sürekli fonksiyondur.

$$A(t)u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds + f(t) \qquad t \in [t_0, T] \qquad \textbf{(1)}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, K(t,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ K_{21}(t,s) & K_{22}(t,s) \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} [6]$$

$a_{11}(t) \neq 0$ olursa $rank(A) = 1$ olur

$rank(A) = 1 \Leftrightarrow a_{21}(t) = \alpha(t)a_{11}(t), \; a_{22}(t) = \alpha(t)a_{12}(t)$

(1). sistemi matris sistemine dönüştürdüğümüzde aşağıdaki sistemi elde ederiz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ K_{21}(t,s) & K_{21}(t,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}(t)u_1(t) + a_{12}(t)u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left[K_{11}(t,s)u_1(s) + K_{12}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_1(t) \\ a_{21}(t)u_1(t) + a_{22}(t)u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left[K_{21}(t,s)u_1(s) + K_{22}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

$B(t)$ **:** genişlemiş matris

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \int_{t_0}^{t} \left[K_{11}(t,s)u_1(s) + K_{12}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_1(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \int_{t_0}^{t} \left[K_{21}(t,s)u_1(s) + K_{22}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_2(t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

$F_1(t)$ ve $F_2(t)$'yi şöyle tanımlıyoruz.

$$F_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left[K_{11}(t,s)u_1(s) + K_{12}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_1(t)$$

$$F_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left[K_{21}(t,s)u_1(s) + K_{22}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_2(t)$$

$rank(B(t)) = 1 \Leftrightarrow \; F_2(t) = \alpha(t)F_1(t) \Leftrightarrow F_2(t) - \alpha(t)F_1(t) = 0$ yani

$$\int_{t_0}^{t} \left[K_{21}(t,s)u_1(s) + K_{22}(t,s)u_2(s)\right] ds + f_2(t) =$$
$$\alpha(t)\int_{t_0}^{t} \left[K_{11}(t,s)u_1(s) + K_{12}(t,s)u_2(s)\right] ds + \alpha(t) f_1(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \left\{\left[K_{21}(t,s) - \alpha(t)K_{11}(t,s)\right]u_1(s) + \left[K_{22}(t,s) - \alpha(t)K_{12}(t,s)\right]u_2(s)\right\} ds$$
$$= \alpha(t) f_1(t) - f_2(t)$$

(4)

(2)’nin ikinci denkleminden ve (4)' ten aşağıdaki sistemi elde ederiz.

$$\begin{cases} a_{11}(t)u_1(t)+a_{12}(t)u_2(t)=\int_{t_0}^{t}\left[K_{11}(t,s)u_1(s)+K_{12}(t,s)u_2(s)\right]ds+f_1(t) \\ \int_{t_0}^{t}\left\{\left[K_{21}(t,s)-\alpha(t)K_{11}(t,s)\right]u_1(s)+\left[K_{22}(t,s)-\alpha(t)K_{12}(t,s)\right]u_2(s)\right\}ds=\alpha(t)f_1(t)-f_2(t) \end{cases}$$

(5)

(5)' in 2.ci denkleminin her iki tarafından da t’ye göre türev almak için yukarıdaki Lemma 1’e başvurarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{cases} a_{11}(t)u_1(t)+a_{12}(t)u_2(t)=\int_{t_0}^{t}\left[K_{11}(t,s)u_1(s)+K_{12}(t,s)u_2(s)\right]ds+f_1(t) \\ \left[K_{21}(t,t)-\alpha(t)K_{11}(t,t)\right]u_1(t)+\left[K_{22}(t,t)-\alpha(t)K_{12}(t,t)\right]u_2(t)= \\ \int_{t_0}^{t}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)K_{11}(t,s)\right)-\frac{\partial}{\partial t}K_{21}(t,s)\right]u_1(s)+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)K_{12}(t,s)\right)-\frac{\partial}{\partial t}K_{22}(t,s)\right]u_2(s)\right\}ds+ \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)f_1(t)\right)-\frac{\partial}{\partial t}f_2(t) \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

(6)' yı matris sistemi şeklinde yazarsak

$$P(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ K_{21}(t,t)-\alpha(t)K_{11}(t,t) & K_{22}(t,t)-\alpha(t)K_{12}(t,t) \end{pmatrix}, \quad u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$M(t,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)K_{11}(t,s)\right)-\frac{\partial}{\partial t}K_{21}(t,s) & \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)K_{12}(t,s)\right)-\frac{\partial}{\partial t}K_{22}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$g(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)f_1(t)\right)-\frac{\partial}{\partial t}f_2(t) \end{pmatrix}$$

sağdaki denklemi elde ederiz $P(t)u(t)=\int_{t_0}^{t} M(t,s)u(s)ds+g(t) \quad t\in\left[t_0,T\right]$ **(7)**

Şartlar :

$i)$ $\det P(t)\neq 0,\ \forall t\in\left[t_0,T\right]\Leftrightarrow \exists\ P^{-1}(t)$ *öyle ki* $P^{-1}(t)P(t)=I_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ii)$ $\alpha(t_0)f_1(t_0)-f_2(t_0)=0$

$iii)$ $\exists\ \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t),\ \frac{\partial}{\partial t}f_1(t),\frac{\partial}{\partial t}f_2(t)\in C[t_0,T];$

$\frac{\partial}{\partial t}K_{11}(t,s),\frac{\partial}{\partial t}K_{12}(t,s),\frac{\partial}{\partial t}K_{21}(t,s),\ \frac{\partial}{\partial t}K_{22}(t,s)\in C[G]\ ,G=\left\{(t,s):t_0\le s\le t\le T\right\}$

O zaman (7) bu hali alır

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} P^{-1}(t)M(t,s)u(s)ds+P^{-1}(t)g(t) \qquad (8)$$

Teorem.

(i),(ii) ve (iii) şartlar verilmiş olsun. O zaman (1) ve (8) denklemleri birbirine denktir, yani (1) denkleminin verilmiş şartlar altında tek çözümü vardır.

Örnek 1.

$$A(t)u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds + f(t) \qquad t \in [t_0, T] \tag{1}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ ts & 1+t-s \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$r(A) = 1 \qquad t_0 = 0,\ T = 1\ ,\ \alpha(t) = t$

$F_2(t) = \alpha(t)F_1(t)$

$\int_0^t \left[tsu_1(s) + (1+t-s)u_2(s) \right] ds + t) = t\int_0^t \left[su_1(s) + 0 \bullet u_2(s) \right] ds + 1$

$$\begin{cases} u_1(t) + tu_2(t) = \int_0^t \left[su_1(s) + 0 \bullet u_2(s) \right] ds + 1 \\ \int_0^t \left\{ \left[ts - ts \right] u_1(s) + \left[(1+t-s) - t \bullet 0 \right] u_2(s) \right\} ds = t - t \end{cases} \tag{2}$$

(2) nin ikinci denkleminden t'ye göre türev alırsak,

$$\begin{cases} u_1(t) + tu_2(t) = \int_0^t su_1(s)\, ds + 1 \\ u_2(t) = \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t}(ts) - \frac{\partial}{\partial t}(ts) \right] u_1(s) + \left[\frac{\partial}{\partial t}(t \bullet 0) - \frac{\partial}{\partial t}(1+t-s) \right] u_2(s) \right\} ds + \frac{\partial}{\partial t}(t \bullet 1) - \frac{\partial}{\partial t} t \end{cases}$$

$u_2(t) = \int_0^t -u_2(s)\, ds \Rightarrow \quad u_2(t) \equiv 0$

$u_1(t) = \int_0^t su_1(s)\, ds + 1$

$$\begin{cases} u(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\beta(s)u(s)\,ds + f(t) \qquad t \in [t_0, T] \\ u(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} R(t,s) f(s)\,ds \\ R(t,s) = \alpha(t)\beta(s) e^{\int_s^t \alpha(\tau)\beta(\tau)\,d\tau} \end{cases}$$

[1]

$$u_1(t) = \int_0^t s u_1(s)\,ds + 1 \quad \text{here } \alpha(t) = 1, \beta(s) = s$$

$$\text{then } R(t,s) = s e^{\int_s^t \tau\,d\tau} = s e^{\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}} \quad u_1(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} R(t,s) \bullet 1\,ds = 1 + e^{\frac{t^2}{2}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}} s\,ds =$$

$$1 + e^{\frac{t^2}{2}} \left(1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \right) = 1 + e^{\frac{t^2}{2}} - 1 = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$u_1(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

kontröl :

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} s & 0 \\ ts & 1+t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{s^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} + 0 = \int_0^t s e^{\frac{s^2}{2}}\,ds + 1 \Rightarrow 1 + e^{\frac{s^2}{2}} \Big|_0^t = 1 + e^{\frac{t^2}{2}} - e^{\frac{0^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$t e^{\frac{t^2}{2}} + 0 = \int_0^t t s e^{\frac{s^2}{2}}\,ds + t = t \int_0^t s e^{\frac{s^2}{2}}\,ds + t = t \left(e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \right) + t = t e^{\frac{t^2}{2}} - t + t = t e^{\frac{t^2}{2}}$$

Örnek 2.

$$A(t)u(t)=\int_{t_0}^{t}K(t,s)u(s)ds+f(t)\qquad t\in\left[t_0,T\right]\tag{1}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & t^2\end{pmatrix},\quad u(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix},\quad K(t,s)=\begin{pmatrix}s & 0\\ ts & 1+t-s\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}t\\ 2t\end{pmatrix}$$

$r(A)=1\quad t_0=0,\ T=1\ ,\ \alpha(t)=t$

$$F_2(t)=\alpha(t)F_1(t)$$

$$\int_0^t\left[tsu_1(s)+\left(1+t-s\right)u_2(s)\right]ds+2t)=t\int_0^t\left[su_1(s)+0\text{•}u_2(s)\right]ds+t$$

$$\begin{cases}u_1(t)+tu_2(t)=\int_0^t\left[su_1(s)+0\text{•}u_2(s)\right]ds+t\\ \int_0^t\left\{\left[ts-ts\right]u_1(s)+\left[(1+t-s)-t\text{•}0\right]u_2(s)\right\}ds=t\text{•}t-2t\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_1(t)+tu_2(t)=\int_0^t su_1(s)\,ds+t\\ u_2(t)=\int_0^t\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(ts\right)-\frac{\partial}{\partial t}(ts)\right]u_1(s)+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\text{•}0\right)-\frac{\partial}{\partial t}(1+t-s)\right]u_2(s)\right\}ds+\frac{\partial}{\partial t}(t\text{•}t)-\frac{\partial}{\partial t}2t\end{cases}$$

$$u_2(t)=\int_0^t-u_2(s)\,ds+2t-2\qquad u_1(t)+tu_2(t)=\int_0^t su_1(s)\,ds+t$$

$$\begin{cases}u\left(t\right)=\int_{t_0}^t\alpha(t)\beta(s)u(s)\,ds+g(t)\qquad t\in\left[t_0,T\right]\\ u\left(t\right)=g(t)+\int_{t_0}^t R(t,s)g(s)\,ds\\ R(t,s)=\alpha(t)\beta(s)e^{\int_s^t\alpha(\tau)\beta(\tau)d\tau}\end{cases}$$

O zaman $\alpha(t)=1,\ \beta(s)=1,g(t)=2t-2$

$$u_2(t)=\int_0^t-u_2(s)\,ds+2t-2\ \Rightarrow\ -\int_0^t 1\text{•}1\text{•}u_2(s)\,ds+2t-2$$

$$u_2(t) = -\int_0^t 1\bullet 1\bullet u_2(s)\,ds + 2t - 2 \qquad u_2(t) = 2t - 2 - \int_0^t 1\bullet 1\bullet e^{-\int_s^t 1\bullet 1 d\tau}\left(2s-2\right)ds$$

$$u_2(t) = 2t - 2 - 2e^{-t}\int_0^t \left(e^s\bullet s - e^s\right)ds = 2t - 2 - 2e^{-t}\left(se^s - e^s\Big|_0^t - e^s\Big|_0^t \right) =$$

$$2t - 2 - 2e^{-t}\left(te^t - e^t + e^0 - \left(e^t - 1\right)\right) = 2t - 2 - 2t + 4 - 4e^{-t} = -4e^{-t} + 2$$

$$u_2(t) = -4e^{-t} + 2$$

$$u_1(t) + tu_2(t) = \int_0^t su_1(s)\,ds + t$$

$$u_2(t) = -\int_0^t 1\bullet 1\bullet u_2(s)\,ds + 2t - 2 \qquad u_2(t) = 2t - 2 - \int_0^t 1\bullet 1\bullet e^{-\int_s^t 1\bullet 1 d\tau}\left(2s-2\right)ds$$

$$u_2(t) = 2t - 2 - 2e^{-t}\int_0^t \left(e^s\bullet s - e^s\right)ds = 2t - 2 - 2e^{-t}\left(se^s - e^s\Big|_0^t - e^s\Big|_0^t \right) =$$

$$2t - 2 - 2e^{-t}\left(te^t - e^t + e^0 - \left(e^t - 1\right)\right) = 2t - 2 - 2t + 4 - 4e^{-t} = -4e^{-t} + 2$$

$$u_2(t) = -\int_0^t 1\bullet 1\bullet u_2(s)\,ds + 2t - 2 \qquad u_2(t) = 2t - 2 - \int_0^t 1\bullet 1\bullet e^{-\int_s^t 1\bullet 1 d\tau}\left(2s-2\right)ds$$

$$u_2(t) = 2t - 2 - 2e^{-t}\int_0^t \left(e^s\bullet s - e^s\right)ds = 2t - 2 - 2e^{-t}\left(se^s - e^s\Big|_0^t - e^s\Big|_0^t \right) =$$

$$2t - 2 - 2e^{-t}\left(te^t - e^t + e^0 - \left(e^t - 1\right)\right) = 2t - 2 - 2t + 4 - 4e^{-t} = -4e^{-t} + 2$$

$$u_2(t) = -4e^{-t} + 2$$

$$u_1(t) + tu_2(t) = \int_0^t su_1(s)\,ds + t$$

$$u_1(t) - 4te^{-t} + 2t = \int_0^t su_1(s)\,ds + t \Rightarrow u_1(t) = \int_0^t su_1(s)\,ds + \underbrace{4te^{-t} - t}_{g(t)}$$

$$u_1(t) = g(t) + \int_0^t se^{\int_s^t \tau d\tau} g(s)\,ds$$

SONUÇ

İntegral denklemlerin tarihçesine kısaca değinildi ve genel olarak integral denklemlerin sınıflandırılması yapıldı. Volterra II.cins lineer integral denklemine örnek verildi ve çözümü yaplıdı.

Çalışmada kullanılmasından dolayı Matrisin rankı tanımı Kronecker-Capelli teoremi verildi. Bir kare matrisinin rankını bulma örneği verildi ve yanında çözümü de elde edildi.

Volterra integral denkeminin temel tanım, lemma ve teoremi verildi. Bu temel kurallar verilen Volterra III.cins lineer integral denklemininin çözümünü incelerken kullanıldı ; ranki 1' eşit olan A matrisi kullanıldı, Kronecker-Capelli teoremi gereğince genişlemiş B matrisinin rankı A matrisinin rankına eşit olarak seçildi. Integral denklem sisteminin her iki tarafından da türev alma işlemlerinden sonra sistem matris sistemi şeklinde yazıldı. Belli koşullar öne sürülerek Volterra III.cins integral denklemi II.cinse indirgendi . Iki tane örnek verilerek ikisinde de tek çözüm elde edildi.

КЫСКАЧА БАЯН

Интегралдык теңдемелердин кыскача тарыхы баяндалды жана интегралдык теңдемелердин жалпы классификациясы берилди. Волтерранын II.түрдөгү интегралдык теңдемесине мисал келтирилип чыгарылды.

Диссертациянын негизги темасына жардамчы катары колдонулгандыктан матрицанын рангы жана Кронекер Капелли теоремасынын аныктамасы берилди. Мисал катары берилген А матрицасынын рангы табылды.

Волтерра интегралдык теңдемесине байланыштуу такай колдонулган аныктама, лемма жана теоремалар берилди. Берилген маалыматтар Волтерранын III.түрдөгү интегралдык теңдемесинин чыгарылышын изилдөөдө колдонулду. Атап айтсак, рангы 1-ге барабар А матрицасы тандалды жана Кронекер Капелли теоремасынын аныктамасы боюнча кеңейтилген В- матрицасынын рангы А матрицасынын рангына барабар болгону үчүн берилген интегралдык теңдеменин жалгыз чыгарылышка ээ болгондугу келип чыкты. Интегралдык теңдемени матрица түрүндө жазып, Волтерранын III.түрдөгү интегралдык теңдемеси II.түргө келтирилип, бир канча шарттар коюлуп, теңдеменин жалгыз чыгарылышка ээ болгондугу тууралуу теореманын далилдөөсү көрсөтүлдү. Эки мисал берилип чыгарылышы табылды.

KAYNAKLAR:

[1] Imanaliev, M. I. and Asanov, A. (1989a). On solutions of systems of Volterra nonlinear integral equations of the first kind. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 309(5), 1052-1055.

[2] Cemal Koç. Introduction to linear algebra. Ankara 2002. : 23-54.

[3] Avit Asanov, Regularization and uniqueness of solutions of nonlinear Volterra operator equations of the third kind." Fen Bilimleri dergisi" Kirgizistan Türkiye Manas üniversitesi

[4] http://yordam.manas.kg/ekitap/pdf/Manasdergi/fbd/fbd3/fbd-3-02.pdf

[5] V.Tcherniak. Lecture notes on linear algebra. Introductory course. Moscow. Dialog MSU.L. 10.

[6] Lavrentiev, M. M. (1959). On integral equations of the first kind. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 127(1), 31-33.

[7] Lavrentiev, M. M., Romanov, V. G., and Shishatskii, S. P. (1980). Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Nauka, Moscow.

[8] Tricomi F. (1960). Integral Equations. – Moscow. Inostrannaya Literatura

[9] Denisov, A. M. (1980). On approximate solution of the Volterra equation of the first kind connected with an inverse problem for the conductivity equation. Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. Vych. Math. And Kibern. 3, 49-52.

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

VOLTERRANIN III.CİNS LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER SİSTEMİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Nasıykat ARZIBAYEVA

BİŞKEK 2010