



**KIRGIZİSTAN - TÜRKİYE
"MANAS" ÜNİVERSİTESİ**



**KIRGIZİSTAN TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**STASYONER FAZLI PARABOL PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN
ASİMPTOTİĞİ**

**Hazırlayan
Ella Abılayeva**

**Danışman
Prof. Dr. Asan Ömüraliyev**

Yüksek Lisans Tezi

**Haziran 2014
KIRGIZİSTAN/BİŞKEK**

**КЫРГЫЗ-ТҮРК МАНАС УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ**

**СТАЦИОНАРДЫК ФАЗАЛУУ ПАРАБОЛАЛЫК МАСЕЛЕНИН
ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ**

**Даярдаган
Абылаева Элла**

**Жетекчиси
ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев**

Магистирдик диссертация

**Июнь 2014
Кыргызстан/ Бишкек**

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Мен бул эмгекте алынган бардык маалыматтарды академиялык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум. Тагыраак айтканда, бул эмгекте колдонулган, бирок мага тиешелүү болбогон маалыматтардын бардыгын тиркемеде так көрсөттүм жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

Аты-жөнү: Абылаева Элла

Колу:

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Ella Abılayeva

İmza :

ЭРЕЖЕЛЕРГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Стационардык фазалуу параболалык маселенин чыгарылышынын асимптотикасы” аттуу магистирдик иш, Кыргыз-Түрк Манас Университетинин магистирдик ишин жазуу эрежелерине ылайык даярдалды.

Даярдаган : Абылаева Элла

Колу:

Илимий жетекчиси: ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев

Колу:

Математика багытынын мүдүрү

ф. м. и. докт., профессор Авыт Асанов

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Stasyoner fazlı parabolik problemin çözümünün asimptotiği ” adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan : Ella Abılayeva

İmza:

Danışman: Prof. Dr. Asan Ömüraliyev

İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Avıt Asanov

İmza:

Ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиевдин жетекчилигинде Абылаева Элла тарабынан даярдалган “Стационардык фазалуу параболалык маселенин чыгарылышынын асимптотикасы” темасындагы магистрдик иш комиссия тарабынан Кыргыз-Түрк Манас университети Табигый илимдер институту Математика багытында магистдик иш болуп кабыл алынды.

..... /..... /

Коммисия:

Илимий жетекчи : Ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев

Төрагасы :.....

Мүчө :.....

Чечим :

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин датасында жана санындагы чечими менен бекитилди.

..... /..... /

Проф. Док. Зафер Гөнүлалан

Институт Мүдүрү

Prof. Dr. Asan Ömüraliyev danışmanlığında Ella Abılayeva tarafından hazırlanan “Stasyoner fazlı parabolik problemin çözümünün asimptotiği” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

..... / /

JÜRİ:

Danışman : Prof. Dr. Asan Ömüraliyev

Üye :.....

Üye :.....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

..... / /

Prof. Dr. Zafer GÖNÜLALAN

Enstitü Müdürü

КЫСКАЧА МАЗМУНУ

Даярдаган	: Абылаева Элла
Университет	: Кыргыз –Түрк “Манас” Университети
Багыты	: Математика
Иштин сыпаты	: Магистирдик иш
Беттердин саны	: xviii+44
Бүтүрүү датасы	: Июнь 2014
Илимий жетекчи	: ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев

СТАНЦИОНАРДЫК ФАЗАЛУУ ПАРАБОЛАЛЫК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Пределдик операторунун спектри болбогон жана тез термелген бош мүчөлүү сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселенин фазасынын туундусу бир чекитте нөлгө айланган учурда чыгарылышынын регуляриланган асимптотикасы түзүлөт. Бош мүчөнүн фазасынын биринчи туундусунун нөлгө айлануусу ички өтмө катмарларды пайда кылат. Маселенин чыгарылышынын асимптотикасы параболалык, ички, тез термелген жана бурчтук чек катмар функцияларды камтый тургандыгы көрсөтүлгөн. Бурчтук чек катмар функциялар эки түзүүлүчүдөн турат: биринчиси параболалык чек катмар функциясы менен чек катмар функциясынын көбөйтүндүсү менен мүнөздөлөт, ал эми экинчиси параболалык жана ички чек катмар функцияларынын көбөйтүндүсү менен мүнөздөлөт.

Бул иш 3 бөлүмдөн турат. Биринчи бөлүмдө адабияттарды изилдөө, экинчи бөлүмдө дүүлүккөндүк, регулярдун жана сингулярдуу дүүлүккөндүк жөнүндө кыскача теория берилди. Ал эми үчүнчү бөлүмдө маселенин коюлушу, аны

регулярлоо жана итераттык маселелерди чыгаруу аркылуу сингулярдуу дүүлүккөн маселенин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулду жана калдык мүчөнүн баалоосу жүргүзүлдү.

Ачкыч сөздөр: Сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселе, асимптотика, стационардык фаза.

GENİŞ ÖZET

Yazar	: Ella Abılayeva
Üniversite	: Kırgızistan - Türkiye «Manas» Üniversitesi
Anabilim Dalı	: Fen Fakültesi
Tezin Niteliği	: Yüksek Lisans Tezi
Sayfa Sayısı	: xviii+44
Mezuniyet Tarihi	: Haziran 2014
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Asan Ömüraliev

STASYONER FAZLI PARABOL PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPOTOTİĞİ

Bu yüksek lisans tezin amacı sınır operatörünün spektrumu olmayan, hızlı dalgalanan serbest terimi olan, türev fazı bir noktada sıfıra dönen bireysel tedirgin parabolik sorunun çözümünün düzenlenmiş asimptotiği bulunmuşt. Türevin birinci fazının sıfıra dönüşmesi geçiş katmanların var olduğunu belirtmektedir.

Problemin çözümünün asimptotiği parabolik, iç, hızlı dalgalanan ve köşe sınır katmanlı fonksiyonları içerdiği gösterilmiştir. Köşe sınır katmanlı fonksiyonlar iki bileşenden oluşmaktadır. Birincisi parabolik sınır katmanlı fonksiyonla sınır katmanlı fonksiyonun çarpımı ile, ikincisi parabolik ve iç sınır katmanlı fonksiyonun çarpımı ile verilmiştir.

Bu yüksek lisans tezi 3 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür taranması ve genel bilgiler, ikinci bölümde ise tedirginlik ve bireysel tedirginlik hakkında kısa teori verilmiştir. Üçüncü bölümde stasyonier fazlı bireysel tedirgin parabol problem konulmuş ve tedirgin problem regulerize edilerek çözümünün

asimptotiđi bulunmuřtur. Bulunan çözümün asimptotiđi konulan problemin asimptotiđi olduđu gösterilmiřtir.

Anahtar kelimeler: Bireysel tedirgin parabolik sorun, asimptotik, stasyonier faz.

АБСТРАКТ

Выполнила	: Абылаева Элла
Университет	: Кыргызско - Турецкий Университет «Манас»
Направление	: Математика
Описание работы	: Выпускник
Количество страниц	: xviii+44
Дата выпуска	: Июнь 2014
Научный руководитель	: Проф. Др. Асан Омуралиев

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СО СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗОЙ

Строится регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи, когда предельный оператор не имеет спектр и быстроосциллирующим свободным членом, производная фазы которого обращается в нуль в одной точке. Обращение в нуль первой производной фазы свободного члена индуцирует переходные слои. Показано, что асимптотика решения задачи содержит параболической, внутренний, быстроосциллирующий и угловые погранслойные функции. Угловые погранслойные функции имеют две составляющих: первая описывается произведением параболической погранслойной функции и погранслойной функции, имеющий быстроосциллирующий характер изменения, а вторая - произведением параболической и внутренней погранслойных функций.

Ключевые слова: Сингулярно возмущенная параболическая задача, асимптотика, стационарная фаза.

ABSTRACT

Prepared by : Ella Abylaeva
University : Kyrgyzstan - Turkey “Manas” University
Direction : Mathematics
Character of work : Master’s Thesis
Number of Pages : xviii+44
Graduate Date : June 2014
Scientific supervisor : Prof. Dr. Asan Omuraliev

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF THE PARABOLIC PROBLEM WITH THE STATIONARY PHASE

Constructed regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed parabolic problem when the limit operator has not range and with rapidly oscillating free term, of which derivative of the phase vanishes at one point.

The vanishing of the first derivative of the phase of the free term induces transition layers. It is shown that the asymptotic solution of the problem contains parabolic, inner, corner and rapidly oscillating boundary-layer functions. Corner boundary-layer functions have two components: the first is described with product of parabolic boundary layer and boundary layer functions, which have a rapidly oscillating nature of the change, also second of them is described with product of the inner and parabolic boundary layer functions.

Keywords: Singularly perturbed parabolic problem, asymptotic, stationary phase.

АЛГАЧ СӨЗ

Билим алуумда салымы чоң, магистрдик ишти даярдоодо мага жардамын жана ой-пикирлерин аябаган илимий жетекчим ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев агайга терең ыраазычылыгымды билдирем.

Айрыкча магистирдик ишти даярдоо учурунда сабырдуулук менен мени колдогон апама жана досторума ыраазычылыгымды билдирем.

Абылаева Элла

Бишкек, 2014

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bu günlere gelmemde en büyük katkı sahibi sayın hocam Prof. Dr. Asan Ömüraliyev'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca; çalışmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ella Abılayeva

Bişkek, 2014

Мазмуну

СТАЦИОНАРДЫК ФАЗАЛУУ ПАРАБОЛАЛЫК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Плагиат жасалбагандыгы тууралуу билдирүү	ii
Эрежелерге ылайыктуулук	iv
Кабыл алуу жана бекитүү	v
Кыскача мазмуну	vii
Geniş Özet	ix
Аннотация.....	xi
Abstract.....	xii
Алгач сөз.....	xiii
Мазмуну.....	xv
Символдор	xvii
Келтирилген сүрөттөрдүн тизмеси	xviii
Киришүү	1

БИРИНЧИ БӨЛҮМ

ЖАЛПЫ МААЛЫМАТ ЖАНА АДАБИЯТТАРДЫ ИЗИЛДӨӨ

Биринчи бөлүм.....	4
1.1 Жалпы маалымат жана адабияттарды изилдөө.	4

ЭКИНЧИ БӨЛҮМ
КЫСКАЧА ТЕОРИЯ

Экинчи бөлүм.....	8
2.1 Дүүлүккөндүк.....	8
2.2 Сингулярдуу дүүлүккөндүк.....	12
2.3 Чектик катмар түшүнүгү	14

ҮЧҮНЧҮ БӨЛҮМ
МАСЕЛЕНИН КОЮЛУШУ ЖАНА ЧЫГАРУУ МЕТОДУ

Үчүнчү бөлүм.....	22
3.1 Маселенин коюлушу	22
3.2 Маселени регулярлоо	23
3.3 Итераттык маселелерди чыгаруу	26

ТӨРТҮНЧҮ БӨЛҮМ
ЖЫЙЫНТЫК ЖАНА СУНУШТАР

4.1 Калдык мүчөнү баалоо	34
4.2 Жыйынтык.....	35

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР	36
ӨМҮР БАЯН.....	44

Символдор

$\varepsilon > 0$ – кичине параметр

$$\Omega = \{ (x, t): x \in (0, 1), t \in (0, T] \}.$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-s^2) ds.$$

Келтирилген сүрөттөрдүн тизмеси

Сүрөт-1 (3.1) маселесинин так чыгарылышы	16
Сүрөт-2 (3.2) туюнтмасынын биринчи мүчөсү $\varepsilon \rightarrow 0$ умтулган учуру	16

Киришүү

Математикалык моделдөөнүн табигый жана техникалык илимдерде кеңири колдонула башташы дифференциалдык теңдемелерди жакындаштырып интегралдоонун көптөгөн алгоритмдерин иштеп чыгууга түрткү болду. Мындай алгоритмдердин жардамы менен ондогон теңдемелердин жакындаштырылган чыгарылыштарын эсептөөгө болот, эгерде андай теңдемелер үчүн чыгарылышынын жашоо теоремасынын шарттары, жалгыздык жана параметрден үзгүлтүксүз көз карандылык теоремалары аткарылса. Аталган теоремалардын шарттары аткарылбаган учурда алгоритмдердин эффективдүүлүгү азаят, ал эми кээ бир учурларда такыр эле жокко эсе болуп калат.

Мындай учурлар каралып жаткан процесстер эң чоң туундусунун алдында кичине параметрлүү дифференциалдык теңдемелер менен баяндалат. Мындай теңдемелер сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелер деп аталат. Сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелер менен баяндалган процесстерге катаал маселерге алып келүүчү тез жана жай түзүлүүчүлөрдү камтыган, бир калыпта болбогон өтмөлөр мүнөздүү. Катаал системалар үчүн салттык алгоритмдер өздөрүнүн эффективдүүлүгүн жоготот. Мындай учурларда каралып жаткан маселенин дифференциалдык теңдемелерди асимптотикалык интегралдоо методдорунун негизинде асимптотикалык анализин жүргүзүү керек. Сандык интегралдоонун методдору менен асимптотикалык интегралдоонун методдорун айкалыштыруу дифференциалдык теңдемелердин жакындаштырылган чыгарылышынын эсептөөсүнүн көлөмү аз жана оптималдуу алгоритмин иштеп чыгууга жардам берет.

Четтик катмарлардын келип чыгышын баяндаган сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелерди асимптотикалык интегралдоо методдорун иштеп чыгуу үчүн интенсивдүү изилдөөлөр 1940-жылдан бери жүргүзүлүп келе жатат. Бул багыттын

өнүгүшүнө Тихонов А. Н., Вазов В., Понтрягин Л. С., Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Маслов В. П., Вишик М. И., Люстерник Л. А., Васильева А. Б., Иманалиев М. И., Ломов С. А., Бугузов В. Ф., Касымов К. А. окумуштуулар өз салымдарын кошушкан. Аталган окумуштуулар жана алардын окуучулары тарабынан сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелерди чыгаруунун ар түрдүү асимптотикалык методдорун иштеп чыгышкан.

Асимптотикалык интегралдоонун алгоритмдеринин колдонулушу оорчулуктарды жараткандыктан мындай методдор атайын спецификалык маселелерди чыгаруу үчүн колдонулган.

Мисалы:

- Васильев А. Б. [1] жана Иманалиев М. И. [2] тарабынан иштелип чыккан кеңири белгилүү четтик функциялардын методун экспоненциальдуу четтик катмарлуу маселелерде колдонууга болот.
- Ал эми 1960-жылдарда Ломов С. А. [3] тарабынан жалган окко карата пределдик оператордун спектринин жайгашуусун чектөөнү жокко чыгарган метод иштелип чыккан.

Бүгүнкү күнгө чейин асимптотикалык метод кадимки дифференциалдык жана кээ бир айрым туундулуу теңдемелер үчүн иштелип келген. Методдун өнүгүшү пределдик оператордун спектрин колдонууга негизделген. Буга чейин каралган маселелерде спектр аркылуу чыгарылыштын кичине параметрге болгон сингулярдуулугу баяндалган.

Бул иште параболалык типтеги айрым туундулуу сингулярдуу дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн четтик маселенин пределдик операторунун спектри болбогон жана бош мүчөсүнүн фазасы стационар чекити болгон учур каралат.

Иштин максаты: Кичине параметрлүү параболалык теңдеме үчүн четтик маселенин бош мүчөсүнүн фазасы стационардык чекитке ээ болгон учурда анын чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу жана каталыгын баалоо;

БИРИНЧИ БӨЛҮМ

1.1 ЖАЛПЫ МААЛЫМАТ ЖАНА АДАБИЯТТАРДЫ ИЗИЛДӨӨ

Сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин математикалык теориясы 19-кылымда өнүгө баштаган. Сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин теориясында биринчи жыйынтык катары Лиувиллдин [4] ишин атоого болот. Ал өз ишинде параметр чексизге умтулган учурда экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн жакындаштырылган чыгарылыш тургузган. Ал эми 1899-жылы Хорн [5] ушул эле экинчи тартиптеги теңдемени асимптотикалык чыгарылышын тургузуу максатында караган. Ал эми 1904-жылы Прандтль [6] Навье-Стокстун четтик катмар концепциясын камтыган сингулярдуу дүүлүккөн системасын изилдеген. 1907-жылы Шлезингер [7], 1908-жылы Биркгоф [8] каалаган тартиптеги сингулярдуу дүүлүккөн кадимки дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын түзүмүн изилдөөдөгү математикалык маселени чыгарган. Ушул эле маселенин жалпы коюлушун 1934-жылы Тржидзинский чыгарган ([9]- [10]). Сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин теориясы систематикалык түрдө өнүгүүсү 1940-жылдарда Тихонов А. Н. [11] жана Вазов В. [12] окумуштуулардын иштеринде көрүнөт.

Окумуштуу Тихоновдун белгилүү пределдик өтмө жөнүндөгү теоремасын тастыктап жатканда калыптанган идеясын өнүктүрүп Васильев А.Б. жана Иманалиев М. И. четтик функциялар методун иштеп чыгышкан. Аталган окумуштуулар жана алардын окуучулары тарабынан бул метод ар тараптуу өнүктүрүлгөн (Мисалы: [12]- [13], [13]-[14] ж. б.). Бул методдун кадимки дифференциалдык жана айрым туундулуу теңдемелерге колдонулушу жогорку деңгээлде эффективдүү болгон. Биринчи жолу четтик катмарды математикалык түрдө баяндап жана аларды кээ бир айрым туундулуу теңдемелер үчүн четтик маселелер классына колдонгон Вишик М. И., Люстерник Л. А. болгон [14].

Маслов В. П. тарабынан иштелип чыккан каноникалык оператор методу сызыктуу эмес сингулярдуу дүүлүккөн маселелерди изилдөөгө өбөлгө түзөт. Методдун мазмуну жана негизги жыйынтыктар белгилүү эки монографияда көргөзүлгөн [17]- [18].

Экспоненциальдык өзгөрүү мүнөздүү четтик катмар тибиндеги функцияларды камтыган сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселелердин асимптотикалык чыгарылышы тургузулган [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27] эмгектер.

[19], [20]- иштери чыгарылыштын асимптотикалык көргөзүлүшүнө арналып, ал эми [21], [22]- иштеринде четтик катмар тибиндеги асимптотика тургузулуп жана тургузулган чыгарылыштын асимптотикасы параболалык четтик катмар тибиндеги функцияны камтыйт.

Олуттуу маселелер жылмакай эмес областта каралып жаткан сингулярдуу дүүлүккөн маселелерди изилдөөдө ортого келип чыгат. Мындай учурда областтын аймагында бурчтук чекиттердин, кошумча четтик катмарлардын келип чыгышынын негизинде асимптотикалык анализ жүргүзүү кыйла оор. Вишик-Люстерник-Васильев-Иманалиевдердин методунун идеясынын негизинде Бутузов В. Ф. бурчтук четтик функциялар методун иштеп чыккан [27]- [28]. Бутузов В. Ф. методунун алгоритми жогоруда аталган кыйынчылыктарды жылмакай эмес чектүү маселелердин кеңири классы үчүн жокко чыгарат. Сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселелердин мезгилдүү чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу үчүн Васильев А. Б. жана анын окуучуларынын иштери арналган [30]- [31].

Жогоруда аталган методдор, демейде сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелердин белгилүү гана классына колдонулат. Методдун каралып жаткан шарттарына жараша бул класс чектик системанын негизинде бөлүнүп алынат. Мисалы: Вишик-Люстерник-Васильев-Иманалиевдердин методу экспоненциалдык четтик катмарлуу маселелерде колдонулат. Маселеге жооп берген чектер пределдик оператордун спектринин ачык жарым тегиздикте жайгашуусунун шарттарына карата болот. Бул

чектер термелүү процесстерин баяндаган сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин кеңири жана маанилүү классын кароону чектейт. Термелүү тибиндеги маселелерге демейде Крылов-Боголюбов-Митропольскийдин ортолоштуруу методу колдонулуп келе жатат. Жогоруда аталган методдордун ар биринин максаты жакындаштырылган чыгарылышты табуу болгонуна карабастан, мындай методдор так чыгарылышты алуу үчүн кандай шарттар керек экендигин изилдебейт. Ар бир методдун максаты

$$\|y(t, \epsilon) - y_{\epsilon, N}(t)\| < c\epsilon^{N+1}, (0.0)$$

баалоосун канааттандырган $y_{\epsilon, N}(t)$ жакындаштырылган чыгарылышынын асимптотикалык аппроксимациясын түзүү болуп эсептелинет. Бул жерде $y(t, \epsilon)$ – сингулярдуу дүүлүккөн маселенин так чыгарылышы ($y(t, \epsilon)$ – так чыгарылыш тургузулбайт, жөн гана анын жашашы далилденет). Демейде (0.0)-дагы c турактуусу аппроксимациянын тартиби N ден көз каранды. c турактуусу N дин өсүшү менен бирге өсүшү мүмкүн, ошондуктан жакындаштырылган чыгарылыш $y_{\epsilon, N}(t)$, N чексизге умтулганда так чыгарылышка умтулбайт. Жогоруда аталган методдордо $N \rightarrow +\infty$ учурда $y_{\epsilon, N}(t) \rightarrow y(t, \epsilon)$ каралган эмес.

1960-жылдарда сингулярдуу дүүлүккөндөрдүн теориясында Ломовдун регуляризациялоо методу өнүүгө баштаган [54]. Аталган методдун максаты сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин спектринин жайгашуусуна карабастан бардык түрүнө колдонуу болгон. Методдун негизинде сингулярдуу дүүлүккөн маселерге өзгөрмө операторлордун спектрдык теориясы жана асимптотикалык катар түшүнүгү жатат.

Сингулярдуу дүүлүккөн маселер үчүн регуляроо методу [32]-[33], [34], [35] иштеринде оператордук жана абстракттык, гильберт мейкиндигиндеги теңдемелер үчүн жалпылынган.

Өзгөчө кызыкчылык жараткан маселелердин бири стабилдүү эмес спектрлүү маселелер. $A(t)$ спектринин чекиттери t маанилеринде ар кандай өзгөчөлүктөргө ээ

болгон учуру. Мисалы: Спектирдин ар башка чекиттери кесилишкен учуру же болбосо нөлгө айланган учуру. Стабилдүү эмес спектрлүү маселелер көптөгөн авторлор тарабынан ар тараптуу изилденген [36]. Регулярлоо методу менен кадимки дифференциалдык теңдемелер изилденген [37],[38], [39],[40],[41].

Стабилдүү спектр шарттарында сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн регулярлоо методу биринчи жолу Сафонов В. Ф. тарабынан иштелип чыккан [42]-[43]. Кийинки иштеринде [44]-[45], [46]-[47],[48] аталган методду өнүктүргөн. Регулярлоо методунун интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелерге жалпылаштыруу [49]-[50], [51]-[52], [53] иштеринде аткарылган.

Буга чейин регулярлоо методунун позициясында сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселелер [54] жана башка иштерде каралган. Аталган иштерде ε кичине параметри убактылуу туундунун алдында турат жана $\varepsilon \rightarrow 0$ эллиптикалык дифференциалдык оператордун спектри бар. Ломовдун методу ар түрдүү сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселелерге кичине параметр көбөйтүүчү катары убакыт боюнча туундусуна кирген учурларына жалпыланган [55]- [56], [57]-[58]. Мындай жалпылоо пределдик оператордун спектри боюнча аткарылат. Бирок теориялык жана практикалык жактан сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин спектри болбогон учуру кызыкчылыктарды жаратат. Ломов С. А. өзүнүн [54] монографиясында сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселесинин пределдик операторунун спектри болбогон учурунда регулярланган асимптотикалык чыгарылышын тургузуу маселесин ортого койгон. Ломов С. А. тарабынан коюлган экинчи маселе бурчтук чекиттери бар болгон областта параболалык типтеги кичине параметрлүү айрым туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн биринчи четтик маселенин чыгарылышынын регулярланган асимптотикасын тургузуу болгон.

ЭКИНЧИ БӨЛҮМ. КЫСКАЧА ТЕОРИЯ

2.1 Дүүлүккөндүк

1846- жылы француз астроному Леверье Уран планетасынын кыймылынын “туура эместигин” изилдөө аркылуу дагы бир планета бар экендигин жана анын ордун жана кыймыл убактысын айтып өткөн. Немец астроному Галле ошол эле эсептөөлөр жана көрсөтүлгөн жерден жаңы планетаны ачкан. Кийинчерээк ачылган планетага Нептун деген ат беришкен. Бул факт XIX кылымдагы илимдин чоң ийгилиги болгон.

Леверьенин мындай ачылыш жазашына эмне түрткү болгон? Уран планетасынын туура эмес кыймылын изилдөөдө Леверье белгисиз бир кошуна планета ага тоскоол болуп, козголоң чыгарып жатканын түшүнгөн. Эгерде дүйнө жүзү боюнча эки гана тела, Күн жана Жер болсо, анда алар бири – бирине бүткүл дүйнөлүк тартылуу законунда айтылгандай кыймылда болушмак. Бул жөнөкөй тилде айтканда козголоңсуз кыймыл. Бирок дүйнө жүзүндө дагы бүткүл дүйнөлүк тартылуу законуна баш ийген жана Күндү тегеренген Жердин кыймылын дүүлүктүргөн башка телолор да бар. Мындай дүүлүгүү күчү планеталардын бири-бирин жок кылуусуна аздык кылат, ошон үчүн алардын кыймылында аябай чоң өзгөрүү жок. Бирок аларды асман телолоруну менен байланыштуу болжолдоолорду эсептөөдө эске алуу зарыл (мисалы, Күндүн чыгыштан жана батыштан тутуулусун болжолдоодо). Негизинен Жердин кыймылын дүүлүккөн кыймыл деп аташат. Бардык ыктымалдуулуктар боюнча “дүүлүгүү” термини биринчилерден болуп асман механикасында пайда болгон.

Математикалык дүүлүккөндүк кичине же болбосо чоң параметрлердин жардамы менен баяндалат. Асман механикасында кичине параметр катары $\varepsilon = \frac{m_1}{m}$, m_1 планетасынын массасынын күндүн m массасына болгон катышын көргөзгөн чоңдук болушу мүмкүн. Ал эми тескери чоңдук чоң параметрдин ролун ойношу

мүмкүн. Демейде кичине параметрдин даражасына карата түзүлгөн катар дүүлүккөн теңдеменин чыгарылышына жыйналса дүүлүккөндөр теориясынын катары деп аталат. Жогоруда айтылгандардын негизинде дүүлүккөн процесс дүүлүкбөгөн процесстердин маанилүү эмес өзгөрүшүнө алып келет деген түшүнүктү жаратышы мүмкүн. Бирок мындай түшүнүк регулярдуу дүүлүккөндөр үчүн гана туура.

Мисал катары жөнөкөй алгебралык теңдемени карап көрөлү:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (0.1)$$

Жогорку теңдеменин $0 < \varepsilon \ll 1$ аралыгында ε кичине параметри менен мүнөздөлгөн дүүлүккөндүрүлгөн учурдагы тамырларын карап корөлү. (0.1) теңдемесинде биринчи кошулуучу негизги мүчө, теңдеменин эки тамыры бар экенин көргөзөт. Экинчи жана үчүнчү кошулуучу- багыныңкы мүчөлөр. Багыныңкы мүчөлөрдүн бирөөсү дүүлүккөндүктүн ролун ойносун дейли:

$$ax^2 + \varepsilon bx + c = 0, \quad (0.2)$$

$\varepsilon = 0$ болгон учурда дүүлүктүрүлбөгөн теңдемени алабыз. $y_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ жана $y_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ тамырларына ээ болгон $ay^2 + c = 0$, (0.3) теңдемесин алабыз.

Каралып жаткан маселеде дүүлүккөндүк регулярдуу болгондуктан, дүүлүктүрүлгөн теңдеменин эки тамыры тең x_1 жана x_2 тамырларына бир аз гана өзгөрөт. Экинчи тартиптеги теңдемелер болгон учурда тамырларды таап жогоруда айтылгандарды далилдөөгө болот. (0.2) теңдемесинен төмөнкүлөрдү табалы:

$$x_1 = \frac{-\varepsilon b + \sqrt{\varepsilon^2 b^2 - 4ac}}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a}} - \varepsilon \frac{b}{2a} + \varepsilon^2 \frac{b^2}{8a\sqrt{-ac}} + \dots \quad (0.4)$$

$$x_2 = \frac{-\varepsilon b - \sqrt{\varepsilon^2 b^2 - 4ac}}{2a} = -\sqrt{-\frac{c}{a}} - \varepsilon \frac{b}{2a} - \varepsilon^2 \frac{b^2}{8a\sqrt{-ac}} + \dots \quad (0.5)$$

Чындыгында эле регулярдуу дүүлүккөн теңдеменин тамырлары дүүлүкпөгөн теңдеменин тамырларынан $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \dots$ тартибиндеги кичине кошумчага айырмаланат.

(0.4) жана (0.5) катарлары $\left| \frac{\varepsilon^2 b^2}{4ac} \right| < 1$ шарты аткарылса жыйналат. Ал эми сингулярдуу дүүлүккөн теңдемени карасак, ал үчүн төмөнкү теңдемени алалы:

$$\varepsilon ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \quad (0.6)$$

Мында дүүлүккөндүктүн ролун теңдеменин негизги мүчөсү аткарат. $\varepsilon = 0$ болгон учурда

$$bx + c = 0, x_1 = -\frac{c}{b}, b \neq 0. \quad (0.7)$$

Көрүнүп тургандай дүүлүкпөгөн теңдеме бир гана тамырга ээ, ал эми дүүлүккөн теңдеме эки тамырга ээ. Мында сингулярдуу дүүлүккөн менен регулярдуу дүүлүккөндүктүн айырмасы көрүнөт. Эми (0.6) сингулярдуу дүүлүккөн теңдеменин эки тамырын табалы. Алар төмөндөгүдөй болушат:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon ac}}{2\varepsilon a} = -\frac{c}{b} - \varepsilon \frac{ac^2}{b^2} - \varepsilon^2 \frac{2a^2 c^3}{b^4} - \dots \quad (0.8)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\varepsilon ac}}{2\varepsilon a} = -\frac{b}{a\varepsilon} + \frac{c}{b} + \varepsilon \frac{ac^2}{b^3} + \dots \quad (0.9)$$

(0.8) жана (0.9) салыштырып карай турган болсок, сингулярдуу дүүлүккөн теңдеменин бир тамыры (0.7) регулярдуу дүүлүккөн теңдеменин кичине кошумчаларга гана айырмаланат. Ал эми (0.9) туюнтмасы менен берилген экинчи тамыр дүүлүкпөгөн теңдеменин тамыры менен эч кандай байланышы жок. $\varepsilon \rightarrow 0$

учурда экинчи тамыр абсолюттук чоңдугу боюнча чексиз өсөт, мындай учурда кичине кошумчалар тууралуу сөз кылууга болбойт.

x_2 тамырынын сингулярдуу бөлүгү кыскартылган теңдемеден аныкталгандыгын байкоого болот.

$$\varepsilon ay^2 + by = 0, y_2 = -\frac{b}{\varepsilon a}, (y_1 = 0),$$

y_2 тамырына карата (0.9) туюнтмасындагы калган мүчөлөр кичине кошумчалардын ролун ойнойт десек болот.

Ушундай жол менен төмөндөгүдөй жыйынтык алынат: регулярдуу учурда дүүлүкпөгөн теңмеге дүүлүккөндүк кичине гана өзгөртүү алып келсе, сингулярдуу болгон учурда толук аналогия байкалбайт. Мындай учурларда регулярдуу учурлар каралган методдордон айырмаланган атайын методдор менен изилдөө керек.

(0.2) регулярдуу дүүлүккөн теңдеменин тамырларын ε даражаларына карата катар менен аныктоо үчүн төмөнкү түрдөгү катар жетиштүү болот.

$$x_i = x_0^i + \varepsilon x_1^i + \varepsilon^2 x_2^i + \dots, i = 1, 2 \dots (0.10)$$

(0.2) теңдемесине коюп ε бирдей даражаларында коэффициенттерди барабарлоо керек. Алынган теңдемелерден (0.10) x_j^i катарынын бардык коэффициенттери табылат. (0.6) сингулярдуу дүүлүккөн теңдеме болгон учурда биринчи тамырды Пуанкаре методу менен аныктоого болот. Жөнөкөй алгебралык теңдеме болгон учурда (0.9) катарын жогоруда аталган схема аркылуу аныктоого болот, ал эми жалпы учурда - дифференциалдык теңдеме болгон учурда маанилүү деңгээлде оор.

2.2 Сингулярдуу дүүлүккөндүк

Маселелерде сингулярдуулук ар түрдүү болушат. Физикалык кубулуштардын жакындаштырылып баяндалышынын негизинде пайда болгон четтик өзгөчөлүктөр, жарылуулар, тез өтмөлөр сыяктуу дүүлүккөн маселелер кездешет [126]. Демейде бардык мындай кубулуштар математикалык түрдө текши эмес жыйналуучулук менен баяндалат, ал эми операторлор кичине же чоң параметрлерди камтыйт.

Мындай маселелерге мисал катары серпилгичтүүлүк теориясынан жөнөкөй маселе карап көрөлү. Узунунан жана туурасынан ийилүүнүн сызыктуулаштырылган теориясынан белгилүү болгондой балканын өлчөмсүз координаттагы ийилүүсү төмөнкү маселени канааттандырат:

$$L_{\varepsilon}\omega \equiv \varepsilon^2 \frac{d^4\omega}{dx^4} - \frac{d^2\omega}{dx^2} = p(x), \quad \omega(0) = \omega(1) = \frac{d\omega(0)}{dx} = \frac{d\omega(1)}{dx} = 0, \quad (1.1)$$

Мында $p(x)$ -сырткы жүк. Чектик шарттар балканын учтары бекитилгендигин билдирет. $\varepsilon^2 = EI(TL^2)^{-1} \ll 1$, E – серпилгичтүүлүктүн турактуу модулу, I – балканын туурасынан кесилишинин нейтралдуу окко карата турактуу инерция моменти, T - узатасынан турактуу аракет, L - балканын узундугу. ε - ийилиштин катуулугу туурасынан аракетке салыштырмалуу кичине деп кабыл алгандык менен камсыздалат.

(1.1) маселесинин чыгарылышы квадратура формасында жазып алсак болот, бирок так болбойт. Ошондуктан маселенин түзүмүн $\varepsilon \rightarrow 0$ учурда жазалы:

$$\omega(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + c_2(\varepsilon)e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} + \omega_0(x, \varepsilon), \quad (1.2)$$

Бул жерде $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_1(\varepsilon) = c_1^0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_2(\varepsilon) = c_2^0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_0(x, \varepsilon) = \omega_0(x)$,

$\varepsilon = 0$ болгон учурда (1.1) туюнтмасынан алынган $\omega_0(x)$ – функциясы пределдик тендеменин чыгарылышы болот.

$$L_0 \omega_0 \equiv -\frac{d_2 \omega_0}{dx^2} = p(x). \quad (1.3)$$

Бул чыгарылыш биринчи четтик шарттарды канааттандырат. c_1^0 жана c_2^0 –каалагандай const.

$\varepsilon \rightarrow 0$ учурда (1.1) маселеси каралса сингулярдуу дүүлүккөн маселе болуп эсептелинет. Терминологияда сингулярдуу сөзүнө регулярдуу эмес сөзү туура келет. Чындыгында, функция $\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ же болбосо $\left(\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right)$ функцияларын $\varepsilon=0$ чекитинин аймагында ε даражаларына карата катарга ажыратууга болбойт. Мындай функцияны ε боюнча сингулярдуу жана (1.1) маселесин сингулярдуу дүүлүккөн деп аташат. Эгер (1.1) маселеси үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялар классында каралса, L_ε операторунун аныкталуу областы $[0, 1]$ сегментинде төрт үзгүлтүксүз туундуга ээ жана четтик шарттарды канааттандырган функциялардан турат. $\varepsilon = 0$ болгон учурда пределдик тендемеси алынат (1.2), анын чыгарылышы $\omega_0 \notin \mathcal{D}(L_\varepsilon)$ каалагандай $p(x) \in C[0,1]$ функциясы үчүн. Эгер $p(x) \in C^\infty[0,1]$ болсо деле, (1.2) пределдик тендемесинин чыгарылышы (1.3)- $\omega_0 \notin \mathcal{D}(L_\varepsilon)$ чыгарылышы болот. Себеби каалагандай чексиз дифференцирленүүчү $p(x)$ функциясында (1.3) маселесинин чыгарылышы төрт четтик шартты канааттандырбайт(1.1). Башкача айтканда, эгер $L_0(\varepsilon = 0)$ пределдик оператордун $\mathcal{D}(L_0)$ аныкталуу областы $\mathcal{D}(L_\varepsilon)$ областына караганда кенен болсо каралган маселе сингулярдуу дүүлүккөн болот.

(1.1) маселесинин чыгарылышы ε ден сингулярдуу көз каранды болгон функцияларды камтыгандыгы үчүн пределдик тендеменин чыгарылышы $\omega_0(x)$ га $[0,1]$ сегментинде текши эмес умтулат. Чектердин аймагында гана нөлдөн айырмаланган функциялар четтик катмар тибиндеги функциялар деп аталат. (1.1) маселесинин чыгарылышы эки четтик катмар тибиндеги функцияны камтыйт, биринчиси сол тарабында $\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$, ал эми экинчиси оң тарабында $\left(\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right)[60]$.

2.3 Чектик катмар түшүнүгү

XX кылымдын башталышында жабышуу шарты аткарылган жерде жалгыз гана жука чектик катмарда сүрүлүү эффектиси бар деген божомолдоодон улам Прандтль чектик катмар теориясын түзгөн. Мындан алынган чектик теңдемелер азыркы учурда “жабышкактык” бар болгон чөйрөнүн тигил же бул кыймылын изилдөөнүн бардык жерлеринде колдонулат. Дубал жанындагы электрон агымдары да чектик катмар пайда кылат. Скинэффекттин пайда болушу да буга байланыштуу.

Математикалык көз караш боюнча чектик катмар теориясын Рейнольдстун аябай чоң санынан турган Навье-Стокстун дифференциалдык теңдемесинин асимптотикалык интегралдоо теориясы катары кароо айтылат. Акыркы жылдары сингулярдуу дүүлүккөн чектик маселелерди асимптотикалык интегралдоо теориясы (мына ушундай маселелердин бири кичине жабышкактуу Навье-Стокстун теңдемеси эсептелет) активдүү өнүгүүдө, жана азыркы учурда тиешелүү оператордун дискреттик спектри учурундагы чектик эффекттердин математикалык баяндалышындагы суроолорго жаңы көз караштарды жазууга болот.

Жөнөкөй мисалдар.

Чексиз түрдө жазылган кыймыл теңдемеси үчүн чектик маселенин мисал катары берилиши көйгөйдүн негизги учурун көрсөтөт:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y &\equiv \varepsilon y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t) \\ y(0, \varepsilon) &= y(1, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Мында ε – кичине параметр, биз аны жеңилдик үчүн оң деп кабыл алабыз.

Суроо туулат: (3.1) маселенин чыгарылышын изилдөөдө ε кичине маанисин колдонууга болобу? Эгерде кичине параметр L_ε операторунун негизги бөлүгүндө турбаса, ал эми көз каранды бөлүгүндө, мисалы, y де, y' те же $h(t)$ да болсо, анда

жогорудагы суроонун жообу дүүлүгүүнүн классикалык теориясы менен берилмек:

(3.1) маселенин чыгарылышын катар түрүндө көрсөт

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots$$

Оператордун негизги мүчөсү дүүлүккөндө жогорудагы суроого жооп бериш, кичине параметр оң сан деп кабыл алган учурдада жеңил эмес. Бул учурдагы маселе дүүлүгүүнүн регулярдуу маселесинен айырмаланып сингулярдуу деп аталат.

(1) теңдемесин дагы жөнөкөйлөтөбүз. Мейли

a, b жана h – турактуулар болсо, анда (3.1) маселенин чыгарылышы:

$$y(t, \varepsilon) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \frac{h}{b}, \quad (3.2)$$

z_1, z_2 – характеристикалык теңдеменин тамырлары

$$\varepsilon z^2 + az + b = 0,$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ болсо, теңдеменин тамыры төмөнкүдөй болот

$$z_1 \sim -\frac{a}{\varepsilon}, \quad z_2 \sim -\frac{b}{a}, \quad c_1 \sim \frac{h}{b} \left(e^{\frac{b}{a}} - 1 \right), \quad c_2 \sim -\frac{h}{b} * e^{\frac{b}{a}},$$

$a > 0$ дөн чоң болгондо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = -\frac{h}{b} * e^{-\frac{b}{a}(t-1)} + \frac{h}{b} \quad (3.3)$$

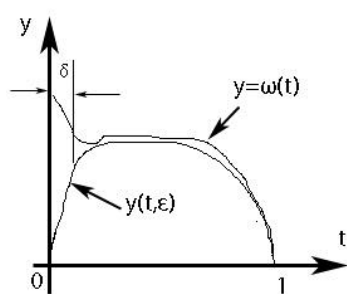
Эгер $t \rightarrow 0$ кетпесе, б.а. $t > 0$. Эгерде негизги берилиште $\varepsilon = 0$ болгондогу

$$a\omega' + b\omega = h, \quad (3.4)$$

теңдемесинин чыгарылышы болуп $\omega = \frac{h}{b} \left(1 - e^{\frac{b}{a}(1-t)} \right)$ чектик функциясы эсептелет. Бирок бул (3.1) маселенин жакындатылган чыгарылышында теңдеменин ε кармаган бөлүгүн алып салуу дегенди түшүндүрбөйт. Бул

тууралуу Прандтль да эскертип өткөн. Ал ε дун теңдемеде эмес чыгарылышта нөлгө умтулуусу зарыл деген.

$\omega(t)$ чектик функциясы биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болуп бир гана шартты канааттандырат, ал эми маселеде эки шарт берилген. Чектик функция акыркы чекиттеги шартты канааттандыраарын байкайбыз: $\omega(1) = 0$ жана баштапкы чекиттеги шартты канааттандырбайт. Мындай баштапкы чекиттен улам чектик катмар пайда болот, төмөнкүдөй түрдө.

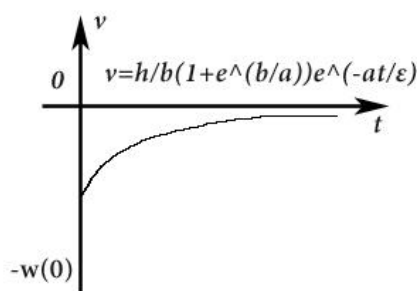


1-Сурот

(3.1) маселенин так чыгарылышы эки четтик чекиттердин шарттарын канааттандырат, жана, эгер $[c, 1]$ кесиндисинде $t = 0$ ($0 < c < 1$) болбогон учуру каралса, анда ал экспоненциалдык ылдамдык менен ω чектик чыгарылышына умтулат жана $t = 0$ чекитине жакын болгон ичке тилкеде болбойт. Мындан улам биз төмөнкү сапаттуу сүрөттү алабыз (1-сүрөт) (a, b жана h оң сандар).

Туурасы δ болгон ичке тилкедеги (3.1) маселесинин чыгарылышы ε кичине параметри болгондо тез эле $\omega(t)$ чектик чыгарылышынын чөйрөсүнө туш келет жана ошол чөйрөдө калат. Мындай тез түшүү (3.2) туюнтманын биринчи мүчөсүнүн негизинде аткарылат.

Бул мүчө $\varepsilon \rightarrow 0$ умтулганда



2-Сурот

функциясына келтирилет, жана ал 2-сүрөттө көрсөтүлгөн. Мындай чектик чекиттердин айланасында нөлдөн айырмаланган, жана да нөлгө бат умтулган функциялар чектик катмар тибиндеги функция деп аташкан. Чектик катмар тибиндеги функция (3.1) теңдеменин (3.4)

теңдемеге өтүшүндө жоголгон экинчи чектик шартты да кармайт. Чектик маанини жоготуу процесси $y(t, \varepsilon)$ функциясынын $\omega(t)$ функциясына бирдей эмес дал келүүсүнүн негизинде болот (t боюнча бирдей калыпта дал келүү жалгыз гана $[c, 1]$ кесиндисинде болот, ал эми биз $(0, 1)$ кесиндисиндеги маселени карап жатабыз).

Капталуучу теланын чегинин айланасында башка бир мүнөзгө ээ, ал эми теладан алыстаган сайын күмөнсүз болот. Прандтль мындай түшүнүктөрдөн алыстап, өзүнүн чектик катмар теңдемесин жазган. Кийинчерээк чектик катмарды $v(t, \varepsilon)$ функциясы (жөнөкөй учурда) түрүндө жаза башташкан. Айрыкча, чыгаруу учурунда, чектик катмардын сызыктуу жана сызыктуу эмес функциялары өз-өзүнчө мүчөгө бөлүнөт. Бул процедура сызыктуу эмес болгон учурда табигый эмес болот. Эгер биз табиятта болуп жаткан учурдагысына көз чаптырсак, анда биз чектик катмарды жана теладан алыстагандагы учурун дагы бир бүтүндү, бир агымды элестеткен нерсени көрө алабыз. Биздин чектик эффекттер тууралуу жазган макалабыз ушул фактыны эсепке алат.

$\varepsilon > 0$ болгон учурдагы (3.1) маселенин чектик шарттарын канааттандырган эки жолу үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү $\varphi(t, \varepsilon)$ функциясынын көптүгү деп L_ε операторун белгилөөчү областы түшүнөбүз. Функциянын бул көптүгүн $D(L_\varepsilon)$ менен белгилейбиз.

$$\textbf{Аныктама: } y_{\varepsilon n} = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots + \varepsilon^n y_n \quad (3.5)$$

түрүндөгү функция (3.1) маселенин n тартиптеги асимптотикалык чыгарылышы деп аталат, эгерде

- 1) $\forall n$ үчүн (3.5) функция $D(L_\varepsilon)$ областында жатса,
- 2) $\|y(x, \varepsilon) - y_{\varepsilon n}\|_C \leq M\varepsilon^{n+1}$ барабарсыздыгы аткарылса.

Мында M турактуу сан ε дон көз карандысыз, $y(t, \varepsilon) - (3.1)$ маселенин так чыгарылышы: C мейкиндигиндеги үзгүлтүксүз функциянын нормасы кадимкидей эле аныкталат: $\| \cdot \| = \max_{0 \leq t \leq 1} | \cdot |$.

Нөлүнчү тартиптеги асимптотикалык чыгарылыш $y_{\varepsilon n} = y_0$ жөнөкөй нөлдүк чыгарылыш же асимптотиканын негизги мүчөсү деп аталат.

(3.1) маселенин бир калыпта эмес чыгарылышынын келип чыгышы $\varphi(t)/\varepsilon$

түрүндөгү функциянын, $\varepsilon = 0$ болгон учурдагы үзгүлтүктүү чыгарылышынын жашашында. Мындай функцияларды ε тегерегинде $\varepsilon = 0$ чекитинде кароого болбойт, алар маселени изилдөөдө тоскоол болушат.

Эгерде биз мындай функцияларды бөлүп алып жана өзүнчө бир бүтүн катары сактоону үйрөнсөк, анда биз маселенин изилденишин жеңилдетебиз. Маселенин спектри бул функцияларды бөлөт (кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн спектрдин орду бизге белгилүү болгондой эле, мүнөздөгүч теңдеменин тамыры). Биздин учурда биз (3.1) теңдеменин биринчи эки мүчөсүн эске алуу менен мүнөздөгүч теңдемени карашыбыз керек:

$$\varepsilon \tau + a(t) = 0, \quad \tau = -a(t)/\varepsilon$$

$\tau = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(x) dx \equiv \varphi(t, \varepsilon)$ функциясын t өзгөрмөсүн камтыган жаңы көз карандысыз өзгөрмө деп жарыялайбыз (көрүп тургандай кийин чектик эффекти берет), $y(t, \varepsilon)$ изделүүчү чыгарылыштын ордуна $y(t, \tau, \varepsilon)$ функциясын изилдейбиз.

$$\tilde{y}|_{\tau=\varphi(t, \varepsilon)} \equiv y(t, \varepsilon) \quad (3.6)$$

$\tilde{y}$ кеңири функциясы үчүн теңдемени биз (3.6) теңдештиктен алабыз:

$$y' = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} \frac{a(t)}{\varepsilon}; \quad y'' = \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} - \frac{2a(t)}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t \partial \tau} - \frac{a'(t)}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + \frac{a^2(t)}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau^2}$$

y', y'' лерди (3.1) маселеге коюп, $\tilde{y}$ функциясы үчүн төмөнкүдөй маселени алабыз:

$$\varepsilon^2 L_2 \tilde{y} + \varepsilon L_1 \tilde{y} + L_0 \tilde{y} = \varepsilon h(t), \quad \tilde{y}(0,0,\varepsilon) = 0, \quad \tilde{y}(1, \varphi(1,\varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (3.7)$$

Мында $L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $L_1 u = -2a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - a'(t) \frac{\partial u}{\partial \tau} + a(t) \frac{\partial u}{\partial t} + bu$,

$$L_0 u = a^2(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)$$

(3.7) маселе ε го карата регулярдуу $\varepsilon \rightarrow 0$ болгондо, тактап айтканда $\varepsilon = 0$ дө $L_0 u = 0$ теңдемесинин чыгарылышын (3.7) чектик шарттардын экөөнө тең багындырууга болот.

Ошондуктан (3.7) маселенин чыгарылышын төмөнкүдөй түрдө карайбыз:

$$\tilde{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(t, \tau) \quad (3.8)$$

(3.8) $\rightarrow$ (3.7) коюп, ε дун даражасына карата коэффициенттерди топтоо менен биз кийинки (3.8) катардын коэффициенттерин аныктоочу маселени алабыз:

$$L_0 y_0 = 0, \quad y_0(0,0) = 0, \quad y_0(1, \varphi(1,\varepsilon)) = 0, \quad (3.9)$$

$$L_0 y_1 = h(t) - L_1 y_0, \quad y_1(0,0) = 0, \quad y_1(1, \varphi(1,\varepsilon)) = 0, \quad (3.10)$$

$$L_0 y_i = -L_1 y_{i-1} - L_2 y_{i-2}, \quad y_i(0,0) = 0, \quad y_i(1, \varphi(1,\varepsilon)) = 0, \quad i = 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

Кичине параметрлүү жогорку туундулуу маселени теңдемеге, турактуу коэффициенттүү теңдеме сыяктуу, кайрылуу менен асимптотикалык чыгарылышын табууга мүмкүн. Мындай түшүнүк бизге (3.9) – (3.11) маселелерди функциянын төмөнкүдөй түрдөгү классы менен чыгаруу зарылдыгын көрсөтөт.

$$y_i = c_i(t) e^{\tau} + v_i(t), \quad (3.12)$$

мында $c_i(t), v_i(t) \in C^\infty[0, T]$. (3.12) функциянын жыйындысы сызыктуу мейкиндикти түзөт, биз аны Y менен белгилейбиз жана жөнөкөй чыгарылыштар мейкиндиги деп атайбыз.

$y_0 \in Y$ функциясы (3.9) теңдемесинин $c_0(t), v_0(t)$ негизсиз функциялар катышкан чыгарылышы болот, бирок алар (3.9) чектик шарттардын негизинде $t = 0$ жана $t = 1$ чекиттеринде чектөөгө ээ:

$$c_0(0) + v_0(0) = 0, \quad c_0(1)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 a(x) dx} + v_0(1) = 0 \quad (3.13)$$

c_0 жана v_0 функцияларын бирдей маанилүү аныктоо үчүн теория иштелип чыккан, ал биринчи Коши маселеси үчүн жазылган. Анын негизи төмөнкүдөй. Y мейкиндигиндеги базис катары $e_1 = e^t, e_2 = 1$ деген эки векторду $y_i = \{c_i, v_i\}$ болгудай кылып тандап алабыз.

Бул базистен биз скалярдык туюнтмасын киргизебиз:

$$(y_i, y_k) = c_i c_k + v_i v_k$$

L_0 оператору үчүн түйүндөш L_0^* операторун тургузабыз.

(10) теңдеменин оң бөлүгүн карайбыз:

$$h(t) - L_1 y_0 = -[av_0' + bv_0 - h] + e^\tau [ac_0' + (a' - b)c_0] \equiv H$$

$H \in Y$ экендигин көрдүк. $c_i(t), v_i(t)$ функцияларын тандоонун негизинде теңдеменин оң бөлүгүн нөлгө барабарлоо, (3.10) жана (3.11) маселелерин чыгаруудагы зарыл жана жетиштүү шарт. (3.10) маселе үчүн төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases} av_0' + bv_0 = h \\ ac_0' + (a' - b)c_0 = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Эгер ε жетиштүү деңгээлде кичине болсо, анда сөзсүз түрдө (3.13) шарттын негизинде чыгарылат.

Мындай жол менен биз $c_0(t)$ жана $v_0(t)$ функцияларын оңой табабыз жана ошондой эле $y_0(t, \tau)$ функциясы да белгилүү болот. (3.14) төн $y_1(t, \tau)$ ну аныктоочу теңдеме $L_0 y_1 = 0$ экендиги келип чыгат. Кайрадан Y тин элементи катары y_1 ди аныктайбыз, тактап айтканда

$y_1 = c_1(t)e^\tau + v_1(t)$ түрүндө жана $i = 2$ болгон учурдагы (3.11) теңдеменин оң бөлүгүн карайбыз.

$$L_1 y_1 - L_2 y_0 = av'_1 + bv_1 + v''_0 - [ac'_1 + (a' - b)c_1 - c''_0]e^\tau \equiv H_1(t, \tau)$$

Төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases} av'_1 + bv_1 = -v''_0 \\ ac'_1 + (a' - b)c_1 = c''_0 \end{cases}$$

Эгер ε жетиштүү деңгээлде кичине болсо, анда сөзсүз түрдө

$c_1(0) + v_1(0) = 0, c_1(1)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 a(x)dx} + v_0(1) = 0$ шарттарынын негизинде чыгарылат.

Мындан ары процесс кайталанат. Ошентип Y мейкиндигиндеги жалгыз $n -$ тартиптеги асимптотикалык чыгарылышты алабыз.

$$y_{\varepsilon n} = e^\tau [c_0(t) + \varepsilon c_1(t) + \dots + \varepsilon^n c_n(t)] + [v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \dots + \varepsilon^n v_n(t)].$$

(3.1) баштапкы маселе үчүн $y_{\varepsilon n}(t, \varphi(t, \varepsilon))$ чыгарылышын кысуу $n -$ тартиптеги асимптотикалык чыгарылыш болоорун көрсөтүү оор эмес.

Чектик эффекти τ жаңы өзгөрмөсүнүн жардамы жана так чыгарылыштын Y мейкиндигин тандоо менен жаздык.

ҮЧҮНЧҮ БӨЛҮМ

МАСЕЛЕНИН КОЮЛУШУ ЖАНА ЧЫГАРУУ МЕТОДУ

3.1 Маселенин коюлушу

1. Бул магистрдик диссертацияда төмөндөгүдөй маселе каралат:

$$L_\varepsilon \equiv u(x, t, \varepsilon) \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u - b(x, t) u = f(x, t) \exp\left(\frac{i\theta(t)}{\varepsilon}\right), (x, t) \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = u(x, t, \varepsilon)|_{x=0} = u(x, t, \varepsilon)|_{x=1} = 0 \quad (4.2)$$

Бул жерде $\varepsilon > 0$ – кичине параметр, $\Omega = \{(x, t): x \in (0, 1), t \in (0, T]\}$

Жогорудагы маселе төмөнкү шарттар аткарылганда чыгарылат:

1. $a(x) \in C^\infty[0, 1], b(x, t), f(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$;
2. $\forall x \in [0, 1]$ функциясы $a(x) > 0$;
3. $\theta'(t) = t\beta(t), \beta(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$;

Бош мүчөнүн туундусу бир чекитте нөлгө айланган учурда, башкача айтканда 3-шарт орун алган учурда каралып жаткан маселенин асимптотикасында өзгөрүүсү тез термелген мүнөздүү ички чек катмар функциялары жана татаал түзүмгө ээ болгон бурчтук чек катмар функциялары пайда болот. Мындай ички чек катмар функциялары (контрасттык түзүм) пределдик операторунун спектри чекиттик өзгөчөлүккө ээ болгон маселелерде пайда болот.

3.2 Маселени регулярлоо

(4.1), (4.2) маселени регулярлоо үчүн регулярлоочу көз карандысыз өзгөрмөлөрдү киргизебиз:

$$r_1 = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad r_2 = \frac{i[\theta(t) - \theta(0)]}{\varepsilon}, \quad \xi_v = \frac{\varphi_v(x)}{\varepsilon}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\zeta_v = \frac{\varphi_v(x)}{\varepsilon^2}, \quad \varphi_v(x) = (-1)^{v-1} \int_{v-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad v = 1, 2,$$

$$\sigma = \int_0^t \exp\left(\frac{i[\theta(t) - \theta(0)]}{\varepsilon}\right) ds \equiv \psi(t, \varepsilon), \quad (4.3)$$

Изделип жаткан $u(x, t, \varepsilon)$ функциясынын ордуна кеңейтилген $z(M, \varepsilon)$, $M = (x, t, r, \sigma, \eta)$, $\sigma = \sigma$, $\eta = (\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2)$, $r = (r_1, r_2)$ функциясы изилденет. Бул функциянын тарытылышы регулярлоо өзгөрмөлөрүнүн негизинде изилденип жаткан чыгарылышка туура келет.

$$z(M, \varepsilon)|_{\gamma=p(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x, t, \varepsilon)$$

$$\gamma = (r, \sigma, \eta),$$

$$p(x, t, \varepsilon) = \left(\frac{i[\theta(t) - \theta(0)]}{\varepsilon}, \psi(t, \varepsilon), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^2} \right), \quad (4.4)$$

(4.3) маселенин негизинде туундулары табылат.

$$\partial_t u(x, t, \varepsilon) \equiv (\partial_t z(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{r_1} z(M, \varepsilon) + \frac{i\theta'(t)}{\varepsilon} \partial_{r_2} z(M, \varepsilon) + \exp(r_2) z(M, \varepsilon),$$

$$\partial_x u(x, t, \varepsilon) \equiv (\partial_x z(M, \varepsilon) + \sum_{v=1}^2 \left\{ \frac{\varphi'_v(x)}{\varepsilon} \partial_{\xi_v} z(M, \varepsilon) + \frac{\varphi'_v(x)}{\varepsilon^2} \partial_{\zeta_v} z(M, \varepsilon) \right\},$$

$$\partial_x^2 u(x, t, \varepsilon) \equiv (\partial_x^2 z(M, \varepsilon) + \sum_{v=1}^2 \left\{ \left(\frac{\varphi'_v(x)}{\varepsilon} \right)^2 \partial_{\xi_v}^2 z(M, \varepsilon) + \left(\frac{\varphi'_v(x)}{\varepsilon^2} \right)^2 \partial_{\zeta_v}^2 z(M, \varepsilon) \right\} + \frac{1}{\varepsilon^2} L_\zeta z(M, \varepsilon); \quad (4.5)$$

$$L_\xi \equiv \sum_{v=1}^2 [2\varphi'_v(x) \partial_{x, \xi_v}^2 + \varphi''_v(x) \partial_{\xi_v}],$$

$$L_\zeta \equiv \sum_{v=1}^2 [2\varphi'_v(x) \partial_{x, \zeta_v}^2 + \varphi''_v(x) \partial_{\zeta_v}].$$

Төмөндө көрсөтүлгөндөй итерациялык маселелер чыгарылган Z функциясынын классындагы элементтер бир гана өзгөрмөдөн көз каранды. Ошондуктан жөнөкөйлөтүү үчүн аралаш туундуларды камтыган кошулуучулар көңүлгө алынбайт .

(4.1), (4.2), (4.4), (4.5) негизинде кеңейтилген функциясы $z(M, \varepsilon)$ үчүн төмөндөгүдөй маселе коюлат.

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_\varepsilon z(M, \varepsilon) &\equiv \frac{1}{\varepsilon^2} T_0 z(M, \varepsilon) + \frac{i\theta'(t)}{\varepsilon} \partial_{r_2} z(M, \varepsilon) + \exp(r_2) z(M, \varepsilon) + T_1 z(M, \varepsilon) \\ &= f(x, t) \exp\left(r_2 + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) \\ &+ a(x) [L_\zeta z(M, \varepsilon) + \varepsilon L_\xi z(M, \varepsilon) + \varepsilon^2 \partial_x^2 z(M, \varepsilon)], \end{aligned}$$

$$z(M, \varepsilon)|_{t=r=\eta=0} = z(M, \varepsilon)|_{x=0, \xi_1=\zeta_1=0} = z(M, \varepsilon)|_{x=0, \xi_2=\zeta_2=0} = 0, \quad (4.6)$$

$$T_0 \equiv \partial_{r_1} - \sum_{v=1}^2 \partial_{\zeta_v}^2,$$

$$T_1 \equiv \partial_t - \sum_{v=1}^2 \partial_{\xi_v}^2 - b(x, t).$$

(4.6) - маселе ε боюнча регулярдуу болот эгерде $\varepsilon \rightarrow 0$, төмөнкү теңдештик орун алат.

$$\left(\widetilde{L_\varepsilon} z(M, \varepsilon)\right)|_{\gamma=p(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon). \quad (4.7)$$

3.3 Итераттык маселелерди чыгаруу

(4.7) маселесинин чыгарылышы төмөнкү катар түрүндө изилденет.

$$z(M, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(M). \quad (4.8)$$

Бул катардын коэффициенттери үчүн (4.6) нын негизинде төмөнкү итераттык маселелер алынат.

$$T_0 z_0(M) = 0, \quad T_0 z_1(M) = -i\theta'(t) \partial_{r_2} z_0(M),$$

$$\begin{aligned} T_0 z_2(M) &= -i\theta'(t) \partial_{r_2} z_1(M) - \exp(r_2) \partial_{\sigma} z_0(M) - T_1 z_0(M) \\ &+ f(x, t) \exp\left(r_2 + \left(\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right)\right) + a(x) L_{\zeta} z_0(M), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_0 z_k(M) &= -i\theta'(t) \partial_{r_2} z_{k-1}(M) - \exp(r_2) \partial_{\sigma} z_{k-2}(M) - T_1 z_{k-2}(M) + \\ &a(x) L_{\zeta} z_{k-2} + a(x) L_{\xi} z_{k-3}(M) + a(x) \partial_x^2 z_{k-4}(M), \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$z(M, \varepsilon)|_{t=r=\eta=0} = 0, \quad z_k(M)|_{x=x-1, \xi_v=0, \zeta_v=0} = 0, \quad v = 1, 2$$

Коюлган маселенин чыгарылышы парабогалык чек катмар функцияларын, тез термелген бош мүчөлүү фазалуу жана $t=0$ учурда нөлгө айланган ички чек катмар функцияларын жана бурчтук чек катмар функцияларын камтыйт. Бул итераттык маселелер чыгарылуучу функциялардын классы киргизилет.

$$\begin{aligned}
 Z = & \left\{ z(M) : z(M) \right. \\
 & = v(x, t) + \exp(r_2) \left[c(x, t) + \sum_{v=1}^2 Y_v(N_v) \right] + u(x, t) \sigma \\
 & + \sum_{v=1}^2 [w_v(x, t) + q^v(x, t) \sigma] \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}} \right), N = (x, t, r_1, \zeta_v), |Y_v(N_v)| \\
 & \left. < c \exp \left(\frac{\zeta_v^2}{8r_1} \right), \quad v(x, t), c(x, t), w_v(x, t), u(x, t), q^v(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Кийинки кадамда T_0, T_1, L_ξ, L_ζ операторлору $z(M) \in Z$ функциясына карата эсептелинет:

$$T_0 z(M) = \sum_{v=1}^2 [\partial_{r_1} Y_v(N_v) - \partial_{\zeta_v}^2 Y_v(N_v)] \exp(r_2),$$

$$\begin{aligned}
T_1 z(M) &= [\partial_t v(x, t) - b(x, t)v(x, t)] \\
&+ \left[\partial_t c(x, t) - b(x, t)c(x, t) \right. \\
&+ \sum_{v=1}^2 (\partial_t Y_v(N_v) - b(x, t)Y_v(N_v)) \exp(r_2) + [\partial_t u(x, t) - b(x, t)u(x, t)] \sigma \\
&+ \sum_{v=1}^2 [\partial_t w_v(x, t) - b(x, t)w_v(x, t)] \\
&\left. = (\partial_t q^v(x, t) - b(x, t)q^v(x, t)) \sigma \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}} \right),
\end{aligned}$$

$$L_\xi z(M) \equiv a(x) \sum_{v=1}^2 [D_{x,v} w_v(x, t) + D_{x,v} q^v(x, t)] \partial_{\xi_v} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}} \right) \right), \quad (4.10)$$

$$L_\zeta z(M) \equiv a(x) \sum_{v=1}^2 [D_{x,v} (\partial_{\zeta_v} Y_v(N_v)) \exp(r_2)],$$

$$D_{x,v} \equiv 2\varphi'_v(x, t) \partial_x + \varphi''_v(x).$$

Берилген четтик шарттарга $z(M) \in Z$ функциясын канааттандыралы:

$$v(x, 0) + c(x, 0) + \sum_{v=1}^2 [Y_v(N_v)|_{t=r_1=0} + w_v(x, 0) \cdot 0 + q^v(x, 0) \cdot 0] = 0,$$

$$\begin{aligned}
& v(0, t) + \exp(r_2) [c(0, t)] \\
& + \sum_{v=1}^2 \left[Y_v(N_v) \Big|_{\zeta_1=0, \zeta_2=\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon^2\sqrt{t}}} \right] + w_1(0, t) + w_2(0, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon^2\sqrt{t}} \right) \\
& + \left[u(0, t) + q^1(0, t) + q^2(0, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon^2\sqrt{t}} \right) \right] \sigma = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v(1, t) + \exp(r_2) \left[c(1, t) + \sum_{v=1}^2 Y_v(N_v) \Big|_{\zeta_2=0, \zeta_1=\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon^2\sqrt{t}}} \right] + w_2(1, t) + w_1(1, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{t}} \right) \\
& + \left[u(1, t) + q^1(1, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{t}} \right) + q^2(1, t) \right] \sigma = 0
\end{aligned}$$

Жогорудагы катнаштыктардан $O\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{t}}\right)\right)$ мүчөлөрүн көңүлгө албай, төмөнкүлөрдү аныктайбыз.

$$v(x, 0) = -c(x, 0),$$

$$Y_v(N_v) \Big|_{t=r_1=0} = 0,$$

$$w_v(x, 0) = \bar{w}_v(x),$$

$$q^v(x, 0) = \bar{q}_v(x),$$

$$w_v(v-1, t) = -v(v-1, t), \quad q^v(v-1, t) = -u(v-1, t), \quad (4.11)$$

$$Y_v(N_v) \Big|_{\zeta_v=0} = d_v(x, t), \quad d_v(v-1, t) = -c(v-1, t), \quad v = 1, 2.$$

Сызыкча функциясы каалагандай функция. $k = 0$ болгон учурда (4.9) итераттык теңдеме бир тектүү, ошондуктан Z функциялар классында чыгарылат жана анын чыгарылышы төмөнкү түрдө көргөзүлөт.

$$\begin{aligned}
z_0(M) = & v_0(x, t) + \exp(r_2) \left[c_0(x, t) + \sum_{v=1}^2 Y_{v,0}(N_v) \right] \\
& + \sum_{v=1}^2 w_{v,0}(x, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}} \right) \\
& + \left[u^0(x, t) + \sum_{v=1}^2 q^{v,0}(x, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}} \right) \right] \sigma. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

(4.12) функциясын (4.9) теңдемесине коюп, (4.10) чыгарылыштардын негизинде, эгер $Y_{v,0}(N_v)$ функциясы теңдеменин чыгарылышы болсо (4.9) чыгарылышы болот.

$$\partial_{r_1} Y_{v,0}(N_v) = \partial_{\xi_v}^2 Y_{v,0}(N_v), v = 1, 2.$$

Бул теңдеменин чыгарылышы четтик шарттарда

$$Y_{v,0}(N_v)|_{t=r_1=0} = 0, \quad Y_{v,0}(N_v)|_{\xi_v=0} = d_{v,0}(x, t), \quad d_{v,0}(v-1) = -c_0(v-1, t)$$

төмөнкү функция

$$Y_{v,0}(N_v) = d_{v,0}(x, t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{r_1}} \right), v = 1, 2. \quad (4.13)$$

$k = 1$ болгон учурдагы кийинки итераттык маселеге өтөлү, (4.12)-негизинде бош мүчө төмөндөгүдөй түргө ээ.

$$F_1(M) = -i\theta'(t) \left[c_0(x, t) + \sum_{v=1}^2 Y_{v,0}(N_v) \right] \exp(r_2).$$

(4.9) теңдеме $k = 1$ болгон учурда Z функциялар классында чыгарылышка ээ болушу үчүн оң тарабындагы кошулуучу $c_0(x, t)$ жок болушу керек, ошондуктан $c_0(x, t) = 0$ дейли. Эгер $Y_{v,1}(N_v)$ төмөнкү теңдеменин чыгарылышы болсо, анда 0 индексинин ордуна 1 болгон (4.12) функциясы (4.9)-теңдеменин $k = 1$ болгон учурдагы чыгарылышы болот.

$$\partial_{r_1} Y_{v,1}(N_v) = \partial_{\zeta_v}^2 Y_{v,1}(N_v) - i\theta'(t)d_{v,0}(x,t)erfc\left(\frac{\zeta_v}{2\sqrt{r_1}}\right).$$

Бул теңдеме четтик шарттарда

$$Y_{v,1}(N_v)|_{t=r_1=0} = 0,$$

$$Y_{v,1}(N_v)|_{\zeta_v=0} = d_{v,1}(x,t)$$

төмөнкү түрдө көрсөтүлгөн чыгарылышка ээ.

$$Y_{v,1}(N_l) = d_{v,1}(x,t)erfc\left(\frac{\zeta_v}{2\sqrt{t}}\right) - i\theta'(t)d_{v,0}(x,t)I(r_1, \zeta_v),$$

$$I(r_1, \zeta_v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{r_1} \int_0^\infty \frac{erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{s}}\right)}{\sqrt{r_1-s}} \left[\exp\left(-\frac{(\zeta_v-y)^2}{4(r_1-s)}\right) - \exp\left(-\frac{(\zeta_v+y)^2}{4(r_1-s)}\right) \right] dy ds$$

Кийинки итераттык маселенин оң тарабында (4.9, $k = 2$) $L_\zeta z_0(M)$ туюнтмасы кирет. Мындай туюнтманын кириши чыгарылышта өзгөчөлүгү итераттонун номери менен бирге өскөн секулярдуу мүчөлөрдүн пайда болушуна алып келет. Ошондуктан $d_{v,0}(x,t)$ функциясын төмөнкү барабардыктар орун алгандай кылып тандап алабыз.

$$L_\zeta z_0(M) \equiv \sum_{v=1}^2 D_{x,v} \left(d_{v,0}(x,t) \right) \partial_{\zeta_v} \left(erfc \left(\frac{\zeta_v}{2\sqrt{r_1}} \right) \right) = 0, \quad (4.14)$$

же

$$D_{x,v} \left(d_{v,0}(x,t) \right) \equiv 2\varphi'_v(x)\partial_x d_{v,0}(x,t) + \varphi''_v(x)d_{v,0}(x,t) = 0, v = 1, 2.$$

берилген баштапкы шарттарда $d_{v,0}(x,t)|_{x=v-1} = -c_0(v-1,t) = 0$,

$c_0(x, t) = 0$ экендигин эске алып жана теңдемени берилген баштапкы шарттарда $d_{v,0}(x, t)|_{x=v-1} = -c_0(v-1, t) = 0$ чыгарып $d_{v,0}(x, t) = 0$, ошондуктан $Y_{v,0}(N_v) = 0$ жыйынтыгы алынат.

Итераттык теңдеменин теңдемемнин оң тарабын (4.9, $k = 2$), (4.14) жана (4.10)

негизинде төмөнкүлөр алынат.

$$\begin{aligned}
F_2(M) = & f(x, t) \exp\left(r_2 + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) - i\theta'(t) \left[c_1(x, t) + \sum_{v=1}^2 d_{v,1}(x, t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_v}{2\sqrt{r_1}}\right) \right] \exp(r_2) \\
& - \exp(r_2) \left[u^0(x, t) + \sum_{v=1}^2 q^{v,0}(x, t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}}\right) \right] \\
& - [\partial_t v_0(x, t) - b(x, t)v_0(x, t)] - \sum_{v=1}^2 [\partial_t w_{v,0}(x, t) - b(x, t)w_{v,0}(x, t)] \\
& - \left[\partial_t u^0(x, t) - b(x, t)u^0(x, t) \right. \\
& \left. + \sum_{v=1}^2 [\partial_t q^{v,0}(x, t) - b(x, t)q^{v,0}(x, t)] \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_v}{2\sqrt{t}}\right) \right] \sigma.
\end{aligned}$$

(4.9, $k = 2$) теңдемесинин чыгарылышын Z классында чыгарыла тургандыгын камсыз кылып, төмөнкүлөр алынат.

$$\partial_t v_0(x, t) - b(x, t)v_0(x, t) = 0,$$

$$\partial_t w_{v,0}(x, t) - b(x, t)w_{v,0}(x, t) = 0,$$

$$\partial_t q^{v,0}(x, t) - b(x, t)q^{v,0}(x, t) = 0,$$

$$\partial_t u^0(x, t) - b(x, t)u^0(x, t) = 0, \quad (4.15)$$

$$i\theta'(t)c_1(x, t) = f(x, t)\exp\left(\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) - u^0(x, t). \quad (4.16)$$

$$(4.15) \text{ теңдеме баштапкы шарт } v_0(x, 0) = -c_0(x, 0) = 0$$

болгондо чыгарылат, ошондуктан $v_0(x, t) = 0$. Экинчи жана үчүнчү теңдеме баштапкы шарт (4.11) болгондо чыгарылат.

$$w_{v,0}(x, t) = \overline{w_{v,0}}(x) \exp(B(x, t)),$$

$$q^{v,0}(x, t) = \overline{q^{v,0}}(x) \exp(B(x, t)), \quad B(x, t) = \int_0^t b(x, s)ds. \quad (4.17)$$

(4.15) ден алынган төртүнчү теңдеме чыгарылышка ээ болушунун шарттарынан аныктала турган (4.16) баштапкы шарттарда чыгарылат.

3-шарттын негизинде (16)-теңдеме чыгарылышка ээ болуш үчүн анын оң жагы $t=0$ болгондо нөлгө барабар болуш керек, башкача айтканда

$$u^0(x, 0) = f(x, 0)\exp\left(\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) \quad (18)$$

(18) тин негизинде (16)-теңдеменин чыгарылышын төмөнкү түрдө жазып алабыз:

$$c_1(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{i\theta'(t)} \left[f(x, t)\exp\left(\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) - u^0(x, t) \right] & \text{эгерде } t \neq 0, \\ c_1^0(x, t) & \text{эгерде } t = 0 \end{cases} \quad (19)$$

мындага $c_1^0(x, t)$ каалагандай функция. Биз $z_0(M)$ функциясын жылмакай катары издеп жаткандыктан, ага катышкан бардык функциялар жылмакай болууга тийиш, б.а. (19) функциясы даы жылмакай болсун үчүн $c_1^0(x, t)$ каалагандай болгондуктан бардык t үчүн

$$c_1(x, t) = \frac{1}{i\theta'(t)} \left[f(x, t)\exp\left(\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) - u^0(x, t) \right]$$

кабыл алабыз.

Ушул эле процессти улантуу менен айрым сумманын бардык коэффициенттери табылат.

$$z_{n,\varepsilon}(M) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k z_k(M).$$

ТӨРТҮНЧҮ БӨЛҮМ

ЖЫЙЫНТЫК ЖАНА СУНУШТАР

4.1 Калдык мүчөнү баалоо

Максимум принцибин колдонуп [61], [62] эмгегинин аналогу катары, регуляроочу функциялардын негизиндеги айрым сумманын тарытылышы (4.1), (4.2) маселесинин асимптотикалык чыгарылышы болуп саналат, башкача айтканда

$$|u(x, t, \varepsilon) - z_{n, \varepsilon}(x, t, p(x, t, \varepsilon))| < c\varepsilon^{n+1}. \quad (4.19)$$

Теорема. 1)-3) шарттары аткарылсын дейли. Анда $\gamma = p(x, t, \varepsilon)$ негизинде айрым сумманын тарытылышы (4.1), (4.2) маселесинин асимптотикалык чыгарылышы болот, башкача айтканда (4.19) барабардык орун алат.

4.2 Жыйынтык

Бул иште парабодалык типтеги айрым туундулуу сингулярдуу дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн четтик маселенин пределдик операторунун спектри болбогон жана бош мүчөсүнүн фазасы стационар чекити болгон учур каралды. Кичине параметрлүү парабодалык теңдеме үчүн четтик маселенин бош мүчөсүнүн фазасы стационардык чекитке ээ болгон учурунда анын чыгарылышынын асимптотикасы регулярлоочу функциялардын жардамы менен тургузулду жана калдык мүчөсү бааланып, $\gamma = p(x, t, \varepsilon)$ негизинде айрым сумманын тарытылышы коюлган маселенин чыгарылышынын асимптотикасы экендиги көргөзүлдү.

Колдонулган адабияттар

- [1] Васильева А.Б.,Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений -М.: Наука, 1973. - 272 б.
- [2] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач - М.: Наука, 1989. - 336 б.
- [3] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. 400 б.
- [4] Liouville I. Sur le developpement des fonctions ou parties en series dont les divers termes sont assujettes a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre contenant une parametre variable//J. Math. Pure Appl. - 1837. - V. 2. -P. 16-35.
- [5] Horn J. Uber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkuriichen Parameter//Math. Ann. - 1899. - Bd 52. - P. 340-362.
- [6] Prandtl L. XJber Flussigkeitsbewegung her sehr kleiner Reibung//Verk. d. III,.Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Teubner. - 1905 - P. 484-494.
- [7] Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Dif- ferential systeme als Funktionen eines Parameters // Math. Ann. - 1907. - Bd 63-P.277-300.
- [8] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. - 1908. - V. 9. - P. 219-231.

- [9] Trjitzinsky W.S. Theory of linear differential equations containing a parameter // Acta Math. - 1936. - V. 67. - P. 1-50.
- [10] Trjitzinsky W.I. Analytic theory of linear differential equations // Acta Math. - 1934. - V. 62. - P. 167-226.
- [11] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем сб. - 1948. - 22(64), бас.2. - 193-204-б.
- [12] Wasow W. Asymptotic solutions of boundary value problems for the differential equation. Duke Math. J. - 1944. - V. 11. - P. 405-411.
- [13] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. - М.: Наука, 1972. - 456 б.
- [14] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. - 1957. - Т.12, вып.5. 3-122 б.
- [15] Губин Ю.П. Метод регуляризации и разрешимость в целом укороченных уравнений метода усреднения // Укр. мат. журн. - 1981. Т.33, бас.3. 297-303 б.
- [16] Капустина Т.О. Асимптотические решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. - 2000. Т.36, бас 5. 662-666-б.
- [17] Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. - 384 б.

- [18] Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: Наука, 1988. 312 б.
- [19] Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной // ДАН СССР. - 1957. - Т.117, бас-6. 935-938-б.
- [20] Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром // ДАН СССР. - 1958. - Т.119, бас-6. 1077-1080 б.
- [21] Треногий В.А Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем // УМН. - 1961. - 16, бас.1. 164-169 б.
- [22] Треногий В.А Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника - Вишика // УМН. - 1970. 25-N 4, 121-156 б.
- [23] Сабзалиев М.М. Асимптотика решения краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с малым параметром // Аз. ин-т нефти и химии-Баку, 1989, 19 б. Деп. Аз. НИИНТИ 24.04.89, N 1266-Аз89.
- [24] Скворцов М.Ю. Асимптотика решения задачи Коши для параболического уравнения с малым параметром при неограниченном времени и разрывном начальном условии // Вестник МГУ. Сер.1 матем. и механик. - 1981. бас-5. 42-46-б.
- [25] Сушко В.Г. Асимптотика решения на угловой характеристике для параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, бас-5. 694-698 б.

- [26] Сушко В.Г. Асимптотические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. бас-2. 570-586-б.
- [26] Сушко В.Г. Асимптотические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика. - 1997. - 3, бас. 2. 570-586.
- [27] Хапаев М.М. Проблемы устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. - 1980. - Т.35, вып.1(211). 127-170-б.
- [28] Бутузов В.Ф. Угловой пограничный слой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными // Дифф. уравнения. 1979. Т.15, бас-10, 1848-1862 б.
- [29] Бучнев В.Ю. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной параболической задачи в критическом случае // ЖВМ МФ. - 1990. - Т.30, бас-6. 858-867 б.
- [30] Васильева А.Б. О периодических решениях уравнений параболического типа с малыми параметрами // Дифф. уравнения. 1983. Т.19, бас-12. 2076-2081 б.
- [31] Васильева А.Б., Радченко И.В. О периодическом решении параболического сингулярно возмущенного уравнения с разными степенями малого параметра при первой и второй производных // ЖВМ и МФ. - 2000. Т.40, бас-8. 1192 б.
- [32] Валиев М.А. Метод регуляризации сингулярно возмущенных дифференциальных операторных уравнений // ДАН СССР. 1974. Т.220, бас-5. 1008-1012 б.

- [33] Валиев М.А., Ломов С. А. Асимптотическое интегрирование сингулярно-возмущенных задач в гильбертовом пространстве // Дифф. уравн. 1981. Т.17, бас-10. 1792-1805 б.
- [34] Рыжих А. Д Асимптотическое интегрирование уравнения в банаховом пространстве // Труды МЭИ. 1980. бас-499. 159-161 б.
- [35] Елисеев А.Г., Ломов С. А. Теория возмущений в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1982, Т.264, 34-38 б.
- [36] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1983, 352 б.
- [37] Бобочко В. Н. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с кратной точкой поворота // ДУ – 1996, Т.32, бас-9, 1283-1285 б.
- [38] Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае негладкого спектра предельного оператора // Матем.сб. - 1995. - Т.186, бас-7. 25-40 б.
- [39] Елисеев А.Г., Каниев Г.С. Асимптотическое интегрирование параболической задачи в случае непрерывного спектра и необратимости предельного оператора // Сб. научных трудов МЭИ, 1989. бас-192. 26-31 б.
- [40] Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Матем.сб. - 1986. - Т.131(173), бас-4(12). 544-557 б.
- [41] Кирпикова О.И. Асимптотическое интегрирование параболической задачи в условиях нарушения стабильности спектра // Сборник научных трудов МЭИ. 1989, бас-215, 38-41б.

- [42] Сафонов В.Ф. Метод нормальных форм для нелинейных сингулярно возмущенных задач. , М.:Изд-во МЭИ, 1989, 65 б.
- [43] Сафонов В.Ф. Метод регуляризации для сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР.
- [44] Губин Ю.П. Метод регуляризации и разрешимость в целом укороченных уравнений метода усреднения // Укр. мат. журн. , 1981, Т.33, бас-3, 297-303 б.
- [45] Губин Ю.П., Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Точечный резонанс в системе двух осцилляторов // Прикл. матем. и механ, 1982, Т.46, бас-3, 389-396 б.
- [46] Кобрин А.И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил // ПММ. 1969, Т.33, бас-3, 431-440 б.
- [47] Кобрин А.И., Мартыненко Ю. Г. Динамика проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле // ДАН СССР. 1981, Т.261, бас 5, 1070-1073 б.
- [48] Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Регуляризация и асимптотические решения сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Укр. мат. журн., 1984, Т.36, 172-180 б.
- [49] Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Математические заметки, 2002, Т.72, бас-5, 654-664 б.
- [50] Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т. Контрастные структуры в интегро-дифференциальных уравнениях с быстроизменяющимися ядрами // Вестник МЭИ – 2002, бас-6.

- [51] Омуралиев А.С. Об асимптотике типа Биркгофа для интегро- дифференц.уравнен. // Труды КГУ, сер. матем. наук, 1976, бас-11, 76-81 б.
- [52] Омуралиев А.С. Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущ. систем интегро-дифференц. уравнен. // Исслед. по интегро- дифференц.уравнен., 1981, бас-14, 182-197 б.
- [53] Сафонов В.Ф., Туйчиев О. Д. Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотика // Дифференц. уравнения., 1997, Т.33, бас 9, 1199- 1210 б.
- [54] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 б.
- [55] Кирпикова О.И. Асимптотическое интегрирование параболической задачи в условиях нарушения стабильности спектра // Сборник научных трудов МЭИ, 1989, бас-215, 38-41 б.
- [56] Кирпикова О.И., Ращепкина Н.А. Об асимптотическом интегрировании одной сингулярно возмущенной параболической задачи // Дифференциальные уравнения с частн. производными, Ленинград, 1989, 7-10 б.
- [57] Елисеев А.Г.,Каниев Г.С. Асимптотическое интегрирование параболическое задачи в случае непрерывного спектра и необратимости предельного оператора // Сб. научных трудов МЭИ, 1989. бас-192, 26-31 б.
- [58] Елисеев А.Г.,Каниев Г.С. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных задач в случае непрерывного спектра предельного оператора, М.: МЭИ, 1989, 4077-В89.

- [59] Елисеев А.Г., Ломов С. А. Теория возмущений в банаховом пространстве // ДАН СССР, 1982, Т.264, бас-1, 34-38 б.
- [60] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений, Москва, 1981., 11-25 б.
- [61] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [62] Омуралиев А. С. Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи// Ж. вычисл. Математики и мат. физики, 2006, Т.46: N-8, 1423-1432 б.

Өмүр баян

Жеке маалымат

- Аты жөнү: Абылаева элла
- Улуту: Кыргыз
- Туулган жылы: 23.10.1989, Ысык-Көл
- Телефон: 0707892389
- e-mail: abylaeva.ella@mail.ru

Билими

- 2014- Кыргыз-Түрк Манас Университети, Табигый илимдер институту, Математика багыты, (Магистратура).
- 2012- Кыргыз-Түрк Манас Университети, Табигый илимдер факультети, Колдонмо математика жана информатика бөлүмү, (Бакалавр).
- 2008- Кыргыз-Түрк Анадолу кыздар лицейи.

Иш тажрыйбасы

- 2012- Кыргыз-Түрк Манас Университети, Табигый илимдер факультети, Колдонмо математика жана информатика бөлүмү, (Лаборатория жооптосу).

Билген тилдери

- Кыргызча (Эне тили)
- Түркчө
- Орусча
- Англисче