Yüksek Lisans Tezi Tezi Hazırlayan Kalima MOLDOKULOVA Matematik Anabilim Dalı 2014

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Hazırlayan
Kalima MOLDOKULOVA

Danışman
Doç.Dr. Elman HAZAR

Aralık 2014
KIRGIZİSTAN/BİŞKEK

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Hazırlayan
Kalima MOLDOKULOVA

Danışman
Doç.Dr. Elman HAZAR

Aralık 2014
KIRGIZİSTAN/BİŞKEK

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmada tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Kalima MOLDOKULOVA

İmza :

YÖNERGEYE UYGUNLUK

"İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler için Hareketli Sınır Değer Problemi" adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisans üstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Kalima MOLDOKULOVA	Doç.Dr. Elman HAZAR
İmza:	İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof.Dr. Avıt ASANOV

İmza:

Doç.Dr. Elman HAZAR danışmanlığında Kalima MOLDOKULOVA tarafından hazırlanan "İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler için Hareketli Sınır Değer Problemi " adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

……….. /…… / ………..

(Tez savunma sınav tarihi yazılacaktır.)

JÜRİ:

Danışman:	Doç.Dr. Elman HAZAR		....
Üye	:	Prof.Dr. Avıt ASANOV	....
Üye	:	Prof.Dr. Muratalı CAMANBAEV	....
Üye	:	Yard.Doç.Dr. Ahmet DOĞAN	....
Üye	:	Yard.Doç.Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ………...… tarih ve…………..…sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………. /……../ ………

Prof.Dr. Zafer GÖNÜLALAN

Enstitü Müdürü

Ф-м.и.к., доцент Элман ХАЗАР жетекчилигинде Калима МОЛДОКУЛОВА тарабынан даярдалган “Экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемеси үчүн кыймылдуу четтик маселе” атту темадагы магистрдик иш коммисия тарабынан Кыргыз – Түрк Манас университети Табигий илимдер институту Математика илими багытында Магистрдик иши болуп кабыл алынды.

........../……/………..

(Магистрдик ишти коргоо датасы)

Коммисия:

Илимий жетекчи:	Ф-м.и.к., доцент Элман ХАЗАР		....
Мүчө	:	Проф. Док. Авыт АСАНОВ	....
Мүчө	:	Проф. Док. Мураталы ДЖАМАНБАЕВ	....
Мүчө	:	Доц.м.а.Докт. Ахмет ДОГАН	....
Мүчө	:	Доц.м.а.Докт. Дагыстан ШИМШЕК	....

Чечим :

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин .... датасында жана .... санындагы чечими менен бекитилди.

........../......../.........

Проф.Док. Зафер Гөнүлалан

Институт мүдүрү

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bu günlere gelmemde en büyük katkı sahibi sayın hocam Doç.Dr. Elman HAZAR'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Deneysel çalışmalarım sırasında karşılaştığım zorlukları aşmamda yardımlarından ve desteklerinden dolayı Bölüm Başkanımız Prof.Dr. Avıt ASANOV ve bütün hocalarıma teşekkür ederim. Tezimdeki yazılı hatalarının ve akademik bilgi eksikliklerinin giderilmesi konusunda yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yard.Doç.Dr. Ahmet DOĞAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarımda beni daima destekleyen Fen Bilimler Enstitüsü Müdürü Sayın Prof.Dr. Zafer GÖNÜLALAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kalima MOLDOKULOVA

Bişkek, Aralık 2014

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Kalima MOLDOKULOVA

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Aralık 2014

Danışman: Doç.Dr. Elman HAZAR

KISA ÖZET

Bu tezde ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerde hareketli sınır değer problemi için Green fonksiyonu üretilmiştir.

Birinci bölümde, diferansiyel denklem için gerekli olan genel tanımlar ve bazı temel teoremler verilmektedir. İkinci bölümde, sınır değer problemi ve Green fonksiyonu hakkında tanımı ele alındı. Üçüncü bölümde ise ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerde hareketli sınır değer problemini çözmek için Green fonksiyonu oluşturulmuş ve bundan yararlanarak yeni bir formül elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Green Fonksiyonu, Başlangıç Koşulları, Lineer Denklemler, İkinci Mertebe.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН КЫЙМЫЛДУУ ЧЕТТИК МАСЕЛЕ

Калима Молдокулова

Кыргыз – Турк Манас Университети, Табигий илимдер институту

Магистрдык иш, бештин айы 2014

Илимий жетекчи: Доц. Док. Элман Хазар

Кеңири анотация

Бул диссертацияда экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемесинде кыймылдуу четтик маселе үчүн Грин функциясы тургузулат.

Биринчи бөлүмүндө дифференциал теңдемелер үчүн керек болгон мүнөздөмөлөр жана кээ бир негизги теоремалар берилди. Экинчи бөлүмүндө четтик маселе жана Грин функциясы жөнүндө маалымат каралды. Үчүнчү бөлүмүндө экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциал теңдемелери үчүн кыймылдуу четтик маселени чыгарыш үчүн Грин функциясы тургузулду жана формуланы чыгарылышы көрсөтүлдү.

Ачкыч сөздөр: Грин Функциясы, Баштапкы Шарттар, Сызыктуу Теңдемелер, Экинчи Тартип.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Калима Молдокулова

Кыргызско – Турецкий Университет Манас, Институт Естественных наук

Магистерская работа, декабрь 2014

Научный руководитель: Доц. Док. Элман Хазар

АННОТАЦИЯ

В этой диссертации рассматривается построение функции Грина для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с подвижной границей.

В первой части были даны общие определения дифференциального уравнения, также были даны основные теоремы с доказательством. Во второй части даны информации о краевой задачи и функции Грина. А в третьей части была построена функция Грина, также получена формула для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с подвижной границей.

Ключевые слова: функция Грина, начальные условия, линейные уравнения, второй порядок.

THE LINEAR DIFERENTIAL EQUATIONS OF THE 2ND ORDER WITH A MOVING BOUN

Kalima MOLDOKULOVA

Kyrgyzstan–Turkey Manas University, Institute of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, December 2014

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Elman HAZAR

ABSTRACT

This thesis reviews the construction of the Green function for this olution of a linear second dorder differential equation with a moving boundary. A general definition of differential equations is givenin the first part of this thesis followed bybasic theorems with poofs. The theorem with proof of the existence of the Green's function is given in the second part of the thesis. The third part is devoted to the Green's function, as a formula for the solution of a linear second order differential equation with a moving boundary.

Keywords: Green's function, initial conditions, linear equations, the 2 ndorder.

İÇİNDEKİLER

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

İKİNCİ BÖLÜM

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Sembol	**Anlamı**
a_1, a_2, b_1, b_2	Bilinmeyen Sabitlerdir
$[\alpha, \alpha_1]$	α, α_1 Kapalı Aralığı
G	Green Fonksiyonu
$R(x) = 0$	Homojen Denklem
$y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha_1) = 0$	Haraketli Sınır Değer Koşulları
$\forall$	Her, Bütün
$\in$	Elemanıdır
$\neq$	Eşit Değildir

ŞEKİL LİSTESİ

GİRİŞ

Diferansiyel denklemlerin tarihi 17. yüzyılda Newton, Leibnitz ve Bernoulli'nin geometri ve mekanikteki problemlerde ortaya çıkan bazı birinci ve ikinci mertebeden basit denklemleri çözmesi ile başladı. Bu ilk keşifler; geometrik ve fiziksel problemlere dayanan tüm diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kalkulüsün temel fonksiyonları cinsinden yazılabileceğini tavsiye ediyor gibiydi. Bu nedenle ilk çalışmaların çoğu; diferansiyel denklemleri çözmek için kalkulüsun bilinen fonksiyonlarına sadece sonlu sayıda toplama, çıkarma, bölme, komposizyon ve integrasyon işlemi uygulayarak ustaca teknikler geliştirmeye yönelikti.

Ancak, çok geçmeden göreceli olarak az sayıda diferansiyel denklemin elemanter yollarla çözülebileceği ortaya çıktı. Yavaş yavaş, matematikçiler tüm diferansiyel denklemleri çözmek için yöntemler keşfetmeyi denemenin umutsuz olduğunu fark etmeye başladılar. Bunun yerine, verilen bir diferansiyel denklemin çözümünün olup olmadığını, ne zaman olduğunu sormanın ve çözüm varsa çözümün özelliklerini diferansiyel denklemin kendisinden elde etmeyi denemenin daha verimli olduğunu gördüler. Bu çerçevede matematikçiler, fonksiyonlarının yeni kaynağının diferansiyel denklemler olduğunu düşünmeye başladılar.

1820 yılında Cauchy, diferansiyel denklemler için ilk varlık teoremini elde etti. Cauchy, $y' = f(x, y)$ tipindeki her diferansiyel denklemin, $f(x, y)$ nin belirli genel koşulları sağladığı zaman, bir çözümü olduğunu ispat etti. Bilinmeyen fonksiyon ile onun türevleri arasındaki bağıntıya diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemler uzun yıllardır, dünyada çoğu fiziksel bilimler ve mühendislik dallarında önemli bir yer tutmaktadır. Bilim adamları ve mühendisler genellikle değişime uğrayan sistemleri incelerler ve diferansiyel denklemler mühendislere bir sistemdeki anahtar değişkenlerin değişimini inceleme ve fiziksel olayı daha iyi anlama olanağı getirir.

Green fonksiyonu; matematikte homojen olmayan diferansiyel denklemlerin, istenen sınır koşulları altında çözülmesinde kullanılan bir yöntemi ve bu yöntemle ilişkili olarak hesaplanan fonksiyonu belirtmekte kullanılır. İlk kez matematikçi George Green tarafından kullanılmıştır.

Bu tezde ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerde hareketli sınır değer problemi için Green fonksiyonu oluşturmak ve örneklerle bunu göstermek hedeflenmiştir.

.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. DİFERANSİYEL DENKLEM HAKKINDA GENEL BİLGİLER

Tanım 1: Bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir. Aşağıda diferansiyel denklem örneği görülmektedir:

$$y'' - 2y' + 3y = x$$

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine o diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Örneğin, $y' + y = 2x + 2$ ve $(1+e^x)y' = e^{x-y}$ birinci mertebeden, $y'' + 12y = 0$ ve $y'' - 2y' + 3y = x$ ikinci mertebeden $y''' - 2y'' + x^4 y' - y = x$ üçüncü mertebeden diferansiyel denklemlerdir. Pratikte en çok karşılaşılan diferansiyel denklemler birinci veya ikinci mertebedendir.

Bir diferansiyel denklemde y, y′, y''... yerine, bir $y = f(x)$ ve bunun $f'(x)$, $f''(x)$,… türevleri konduğunda denklem özdeş olarak gerçeklenirse, $y = f(x)$ diferansiyel denklemin bir çözümü olur [1].

1.1 İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANIMI

Tanim 2: İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler P, Q ve R x'e bağlı değişkenler olmak üzere şu şekildedir:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Burada $R(x)$ terimi, içerisinde y ve türevleri bulunmayan tüm ifadeleri temsil eder ve bu yüzden homojen olmayan terim adını alır [2].

$R(x) = 0$ durumunda ise denklem homojen olur [3].

1.2 İKİNCİ MERTEBEDEN HOMOJEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİ:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

denklemi genel olarak integre edilmez. Şimdi bazı özel halleri inceleyeceğiz. Denklemi kısaltmak için,

$$D(y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y$$

koyalım ve y_1 ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin bir özel çözümü olsun. Bu durumda

$$y''_1 + P(x)y'_1 + Q(x)y_1 = 0$$

ve kısaca

$$D(y_1) = 0$$

olur. Önce bu diferansiyel denkleme ait bazı teoremleri gösterelim.

Teorem 1: y_1 , ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin bir özel çözümü ise, C bir keyfi sabit olmak üzere, C y_1 de bu denklemin bir özel çözümüdür [4].

İspat:

$$D(y_1) = 0$$

olacağından,

$$\mathrm{D(Cy_1) = CD(y_1) = 0}$$

olduğu kolayca görülür.

Şu halde, y_1 ve y_2 ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denkleminin farklı çözümleri ise, bunların oranı sabit değildir [4]

$$\frac{y_1}{y_2} \neq C$$

Teorem 2: y_1 ve y_2 ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin iki özel çözümü ise; C_1 ve C_2 iki keyfi sabit olmak üzere,

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1\mathrm{y}_1 + \mathrm{C}_2\mathrm{y}_2$$

ifadesi bu denklemin genel çözümüdür [4].

İspat:

Gerçekten, y_1 ve $y_2$özel çözümler olduğundan

$$D(y_1) = 0, \quad D(y_2) = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$D(C_1y_1 + C_2y_2) = D(C_1y_1) + D(C_2y_2)$$

yazılır. Oysa

$$D(C_1y_1) = C_1D(y_1) = 0, \qquad D(C_2y_2) = C_2D(y_2) = 0$$

olduğundan

$$D(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

bulunur. Şu halde

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

eşitliği ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin bir çözümüdür ve iki keyfi sabite (parametre) bağlı olduğundan genel çözümdür [4].

Teorem 3: İkinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin bir özel çözümü bilinirse denklem entegre edilir [4].

İspat:

İkinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemi, $D(y)=y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ ve bu denklemin özel çözümlerinden birisi y_1 olsun.

y_1 özel bir çözüm olsun:

$$D(y_1)=y''_1+P(x)y'_1+Q(x)y_1=0$$

u, bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$y=y_1u$$

koyalım.

$$y'=y'_1u+\ y_1u', \qquad y''=y''_1u+\ 2y'_1u'+y_1u''$$

olur. Buradan diferansiyel denklem

$$y''_1u+2y'_1u'+y_1u''+P(x)(y'_1u+y_1u')+\ Q(x)y_1u=0$$

veya,

$$uD(y_1)+y_1u''+\left[2y'_1+P(x)y_1\right]u'=0$$

şeklinde yazılır;

$D(y_1)=0$ olduğundan,

$$y_1u''+\left[2y'_1+P(x)y_1\right]u'=0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$u'=v$$

koyarak

$$u''=v'=\frac{dv}{dx}$$

ve buradan

$$y_1 \frac{dv}{dx} + \left[2y'_1 + P(x)y_1\right]v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2y'_1 + y_1 P(x)}{y_1} dx$$

yazılır ve bu son denklem için değişkenlerine ayrılmıştır denir. Entegre ederek

$$v = F(x, C_1)$$

ve

$$du \ = vdx$$

olduğundan

$$du = F(x, C_1)dx$$

$$u = G(x, C_1, C_2)$$

elde edilir.

$$y = \ y_1 u$$

dir; şu halde göz önüne alınan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\mathrm{y} \ = \mathrm{y}_1 \mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$$

olur [4].

Örnek 1:

$$\mathrm{x}^2\mathrm{y}'' + 4\mathrm{xy}' + 2\mathrm{y} = 0$$

denkleminin bir özel çözümü $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ olduğu bilindiğine göre bu denklemin genel çözümünü bulunuz [4].

Çözüm:

$$y = \frac{1}{x}u$$

dönüşümünün birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = -\frac{1}{x^2}u + \frac{1}{x}u', \qquad y'' = \frac{2}{x^3}u - \frac{2}{x^2}u' + \frac{1}{x}u''$$

elde edilir. Diferansiyel denklem, kısaltmadan sonra,

$$xu'' + 2u' = 0$$

olur.

$u' = v$ koyarak,

$$v = \frac{C_1}{x^2}$$

ve buradan

$$u = \frac{C_1}{x} + C_2$$

elde edilir. Sonuç olarak

$y = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x}$ bulunur [4].

1.3 İKİNCİ MERTEBEDEN HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMİN İNCELENMESİ:

İkinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemi $D(y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ ve genel çözümüde

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

olsun. Burada $y_1$ve y_2 iki farklı özel çözümdür:

$$D(y_1) = 0, \qquad D(y_2) = 0$$

Şimdi, ikinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin genel çözümünü belirlemek için sabitin değişimi metodunu kullanacağız;

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

yani

$$D(y) = R(x)$$

denklemini gözönüne alıp bu denklemin

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

şeklinde bir çözümünü arayalım. Burada C_1 ve C_2, belirlemek istediğimiz bilinmeyen fonksiyonlardır. Böyle bir çözüm var ise bunun

$$D(y) = R(x)$$

denklemini gerçeklemesi lazımdır. Fakat bu suretle, iki fonksiyonu belirlemek için elimizde sadece bir bağıntı bulunmaktadır. Bu sebepten, bu iki fonksiyonun sağladığı diğer bir bağıntıyı bulabiliriz.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

fonksiyonu'nun türevini alarak

$$y' = C'_1y_1 + C_1y'_1 + C'_2y_2 + C_2y'_2$$

yazılır. Burada C_1 ve C_2 fonksiyonları için

$$C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0 \tag{1}$$

şartını koşarak

$$y' = C_1y'_1 + C_2y'_2$$

ve

$$y'' = C'_1y'_1 + C'_2y'_2 + C_1y''_1 + C_2y''_2$$

bulunur. y , y' ve y'' nin bu ifadelerini diferansiyel denklemde yerine koyalım;

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + P(x)\left(C_1 y'_1 + C_2 y'_2\right) + Q(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = R(x)$$

veya

$$C_1 D\left(y_1\right) + C_2 D\left(y_2\right) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = R(x)$$

yazılır; ve

$$D(y_1) = 0, \qquad D(y_2) = 0$$

olduğundan

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = R(x) \tag{2}$$

kalır, (1) ve (2) denklemlerinden C'_1 ve C'_2 bulunur:

$$C'_1 = -\frac{y_2}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} R(x), \qquad C'_2 = \frac{y_1}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} R(x)$$

Buradan iki integrasyon ile C_1 ve C_2 birer keyfi sabite bağlı olmak üzere belirlenir:

$$C_1 = \int -\frac{y_2}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} R(x) dx + K_1,$$

$$C_2 = \int \frac{y_1}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} R(x) dx + K_2 \qquad [4].$$

Teorem 4: İkinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin genel çözümü; ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin genel çözümüne, ikinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin bir özel çözümü ilave edilerek elde edilir [4].

İspat:

Gerçekten

$$D(y) = R(x)$$

İkinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin genel çözümü olsun:

$D(z) = 0.$

$$y = u + z$$

koyarak

$$D(u + z) = R(x)$$

ve buradan

$$D(u) + D(z) = R(x)$$

yazılır.

$$D(z) = 0 \text{ ve } D(u) = R(x)$$

olduğundan $y = u + z$ fonksiyonu

$$D(y) = R(x)$$

denkleminin genel çözümüdür [4].

Teorem 5: İkinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin bir özel çözümü bilinirse ikinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem entegre edilebilir [4].

İspat:

Gerçekten,

$$D(y) = 0$$

denkleminin bir özel çözümü y_1 olsun.

$$D(y) = R(x)$$

denkleminde

$$y = y_1 u$$

koyalım,

$$y' = y'_1 u + y_1 u', \quad y'' = y''_1 u + 2y'_1 u' + y_1 u''$$

Olduğundan $D(y) = R(x)$ denklemi,

$$D(y_1) + y_1 u'' + [2y'_1 + y_1 P(x)]u' = R(x)$$

veya y_1 fonksiyonu $D(y) = 0$ denkleminin bir çözümü olduğundan

$$D(y_1) = 0$$

dır ve $u' = v$ koyarak

$$y_1 v' + [2y'_1 + y_1 P(x)]v = R(x)$$

yazılır. Bu birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemi entegre ederek v, ikinci bir integrasyonla u ve sonuçta y bulunabilir [4].

Örnek 2:

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz [4].

Çözüm:

İkinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin bir özel çözümü $y_1 = \frac{1}{x}$ olduğu bilindiğinden, verilen denklemin genel çözümü

$$y = \frac{u}{x}$$

koyarak,

$$y' = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x}, y'' = \frac{2u}{x^3} - \frac{2u'}{x^2} + \frac{u''}{x}$$

elde edilir. Bu durumda diferansiyel denklem,

$$xu'' + 2u' = e^x$$

şeklini alır. $u' = v$ koyarak

$$xv' + 2v = e^x$$

yazılır, bu birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir ve diferansiyel denklemi çözersek

$$v = \frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x - \frac{K_1}{x^2}$$

bulunur, $v = u'$ olduğundan,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x - \frac{K_1}{x^2}$$

veya

$$u = \int \left(\frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x\right) dx + \frac{K_1}{x} + K_2$$

yazılır. İkinci taraftaki integral,

$$t = \frac{1}{x}e^x$$

değişken dönüşümü yapılarak derhal entegre edilir:

$$u = \frac{e^x}{x} + \frac{K_1}{x} + K_2$$

$$y = \frac{u}{x}$$

olduğundan, aranılan genel çözüm,

$$y = \frac{e^x}{x^2} + \frac{K_1}{x^2} + \frac{K_2}{x}$$

şeklinde yazılır [4].

İKİNCİ BÖLÜM

1.SINIR DEĞER PROBLEMİ VE GREEN FONKSİYONU

1.1 Sınır Değer Problemi

Tanım. Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine sınır değer problemi denir. Verilen şartlara da sınır şartları ismi verilir [5].

Örnek 1:

$y'' + 2y = e^x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ problemi sınır değer problemidir. Çünkü iki şart, bağımsız değişkenin $x = 0$, $x = 1$ farklı değerleri için verilmiştir [5].

Örnek 2:

$y'' + 4y = 0$, $y(\frac{\pi}{8}) = 0$, $y(\frac{\pi}{6}) = 1$. Sınır değer problemini çözünüz [5].

Çözüm:

Verilen denklemin genel çözümü

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

olduğu düşünülürse.

$$y(\frac{\pi}{8}) = C_1 \sin(\frac{\pi}{4}) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + C_2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0$$

$$y(\frac{\pi}{6}) = C_1 \sin(\frac{\pi}{3}) + C_2(\frac{\pi}{3}) = C_1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + C_2(\frac{1}{2}) = 1$$

bulunur.

$$C_1(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + C_2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0$$

$$C_1(\frac{1}{3}\sqrt{3}) + C_2(\frac{1}{2}) = 1$$

denklem sisteminden,

$$C_1 = -C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

bulunur. Bu sabitler yerlerine konulursa,

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}(\sin 2x - \cos 2x)$$

çözümü bulunur [5].

1.2 Green Fonksiyonu

İkinci mertebeden homojen olmayan lineer

$$\mathrm{y}'' + \mathrm{a}(\mathrm{x})\mathrm{y}' + \mathrm{в}(\mathrm{x})\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) \tag{1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$$\mathrm{y}(\alpha) = 0, \ \mathrm{y}'(\alpha_1) = 0 \tag{2}$$

bu denklemin hareketli sınır değer koşullarını sağlayan çözümünün kurulmasında Green fonksiyonu önemli rol oynar.

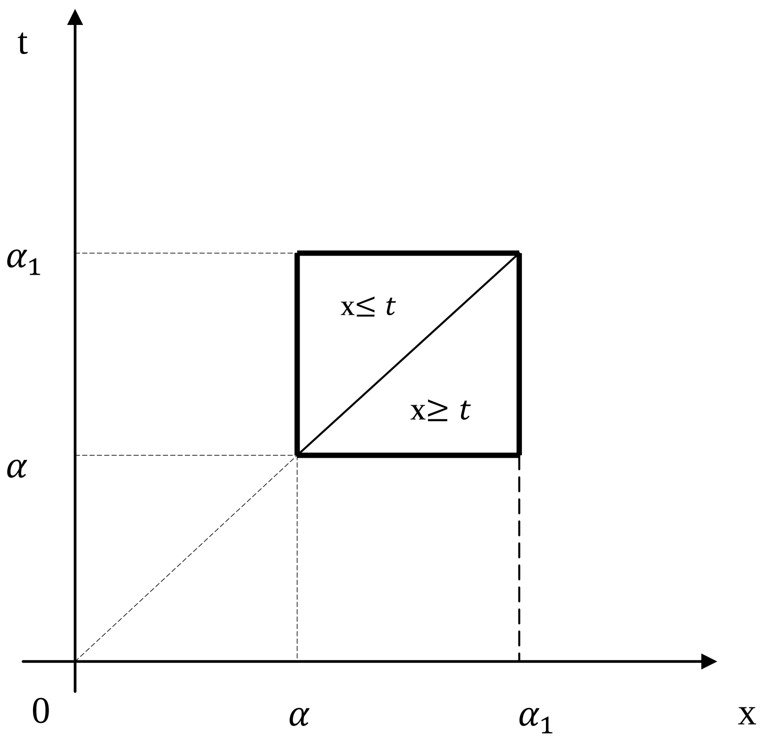
Sınır değer problemini çözmek için Green fonksiyonu oluşturalım:

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} \mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{t})\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}, \tag{3}$$

Burada $\mathrm{f}(\mathrm{t})$ verilen bir fonksiyondur.

Green fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu halde bu fonksiyona hareketli sınır değer probleminin Green fonksiyonu denir.

1. G fonksiyonu için x saptanan t aralığında $\alpha < \mathrm{t} < \alpha_1$ diferansiyel denklemi $\mathrm{y}'' + \mathrm{a}(\mathrm{x})\mathrm{y}' + \mathrm{в}(\mathrm{x})\mathrm{y} = 0$ bütün $\mathrm{x} \neq \mathrm{t}$ sağlıyor. Her bir iki üçgen alanında $\alpha \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{t} \leq \alpha_1$ ve $\alpha \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{x} \leq \alpha_1$. (Şekil 1.)
2. G fonksiyonu x'e göre sınır değer problemini sağlar $\mathrm{G}(\alpha,\mathrm{t}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{x}}(\alpha_1,\mathrm{t}) = 0$
3. G fonksiyonu $\mathrm{x} = \mathrm{t}$ için $\alpha < \mathrm{t} < \alpha_1$ aralıksızdır, türevli $\mathrm{G}'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x},\alpha)$ bir değerine sıçrama yapar.



Şekil 1. İki alanlı, $x \leq t$ ve $x \geq t$, Green fonksiyonunda [6].

Teorem: Eğer G fonksiyonu (1), hareketli sınır değer probleminin Green fonksiyonu ve f fonksiyonu $[\alpha, \alpha_1]$ aralığında sürekli ise, bu taktirde (3) fonksiyon (1) denkleminin hareketli sınır değer koşullarını sağlayan çözümüdür.

Green Fonksiyonu İçin Basit Örnekler.

Örnek 3. Green fonksiyonu diferansiyel denklem $M[y] = -y''$ ve sınır şartlar için $y(0) = y(1) = 0$.

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & x \leq t \\ t(1-x), & x \geq t \end{cases}$$

olur [6].

Örnek 4.

$M[y] = -y''$ $y(0) = y'(1) = 0$.

Green fonksiyonu

$$G(x,t)=\begin{cases} x, & x\le t \\ t, & x\ge t \end{cases}$$

içindir. Buradan:

$$G'(x,x+0)-G'(x,x-0)=1$$

$$G'(x+0,x)-G'(x-0,x)=-1$$

olur [6].

Örnek 5.

$M[y]=-y''-\lambda y,\quad y(0)=0,\quad y'(1)=\lambda y(1).$

$\lambda=r^2$ koyarak

$$G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\sin rx}{r}\left[\dfrac{\sin rt(r\cos r+\sin r)}{\cos r-r\sin r}+\cos rt\right], & x\le t, \\ \dfrac{\sin rt}{r}\left[\dfrac{\sin rx(r\cos r+\sin r)}{\cos r-r\sin r}+\cos rx\right], & x\ge t \end{cases}$$

alırız.

Bu durumda Green fonksiyonun oluşturabiliriz, eğer λ (parametri) diferansiyel denkleme ve sınır şartlara girerse [6].

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

1.İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE HAREKETLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ'Nİ ÇÖZMEK İÇİN GREEN FONKSİYONUN OLUŞTURULMASI VE YENİ BİR FORMÜLÜN ELDE EDİLMESİ.

İkinci mertebeden homojen olmayan lineer

$$y'' + a(x)\, y' + в(x) y = f(x), \tag{1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemin hareketli sınır değer koşulları aşağıdaki gibidir:

$$y(\alpha) = 0, \quad y'(\alpha_1) = 0 \tag{2}$$

Green fonksiyonu oluşturalım. Sınır değer problemiyi çözmek için

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} G(x,t) f(t) dt \tag{3}$$

alırızki burada her bir verilen $f(t)$ fonksiyonudur.

Teorem: Aşağıdaki koşullar [7] sağlanmış olsun:

$$в(x) = K^2(x) + \beta^2(x) + K'(x) - \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} K(x)$$

$$K(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) + \frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right]$$

Burada $a(x),\ \beta(x),\ \beta'(x),\ K'(x) \in C[\alpha,\ \alpha_1]$ ve $\beta(x) \neq 0$ herkes içindir $x \in [\alpha,\ \alpha_1]$.

O zaman (1) - (2) problemi Green fonksiyonu

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1}\\ \cdot\, e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right),\ \alpha\le x\le t\le\alpha_1\\ \dfrac{-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)}{\beta(t)}e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)ds\right)\\ +\dfrac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2}{\beta(t)\gamma_1}e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right),\\ \alpha\le t\le x\le\alpha_1\end{cases}$$

yardımıyla çözülür.

İspat:

Bu durumda makalenin temelini oluşturan (1) denkleminin genel çözümü [7] deki çözümün aynısıdır.

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

burada $C_1,\ C_2$ - her hangi sabit sayılardır.

$$y_1(x)=e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds),$$

$$y_2(x)=e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)$$

Buradan $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ türevlerini alalım ve buradan

$$y'_1(x)=e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\left(-K(x)\right)\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)+e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\left(-\sin\int_\alpha^x \beta(s)ds\right)\beta(x),$$
$$y'_2(x)=e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\left(-K(x)\right)\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)ds\right)+e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\beta(x)$$

elde edelim.

Green fonksiyonu her iki üçgen bölge alanında $x\le t$ ve $x\ge t$ oluşturulmalıdır:

$$G(x,t)=\begin{cases}(a_1+b_1)y_1(x)+(a_2+b_2)y_2(x), & x\le t\\ (a_1-b_1)y_1(x)+(a_2-b_2)y_2(x), & x\ge t\end{cases}$$

Green fonksiyonun 2. коşulda $x\le t$ olduğunda,

$G(\alpha, t)$

$$= \left\{(a_1 + b_1)[e^{-\int_\alpha^\alpha K(s)ds} \cos(\int_\alpha^\alpha \beta(s)\, ds)] + (a_2 + b_2)\left[e^{-\int_\alpha^\alpha K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^\alpha \beta(s)\, ds\right)\right]\right\}$$

$$= (a_1 + b_1) = 0 \tag{4}$$

elde edilir.

Green fonksiyonun 2. koşulunda $x \geq t$ olduğundan,

$$G'_x(x,t) = \begin{cases} (a_1 + b_1)y'_1(x) + (a_2 + b_2)y'_2(x), & x \leq t \\ (a_1 - b_1)y'_1(x) + (a_2 - b_2)y'_2(x), & x \geq t \end{cases}$$

yazılır. O halde

$$G_x{}'(\alpha_1, t) = (a_1 - b_1)y'_1(x) + (a_2 - b_2)y'_2(x) = 0$$

olur. y'_1 ve y'_2 yerine yukarıdaki ifadeyi koyarak,

$$(a_1 - b_1)$$
$$\cdot \left[e^{-\int_\alpha^{\alpha_1} K(s)ds}\big(-K(\alpha_1)\big) \cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^{\alpha_1} K(s)ds}\left(-\sin \int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)ds\right)\beta(\alpha_1)\right]$$
$$+(a_2 - b_2)$$
$$\cdot \left[e^{-\int_\alpha^{\alpha_1} K(s)ds}\big(-K(\alpha_1)\big) \sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)ds\right) + e^{-\int_\alpha^{\alpha_1} K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\, ds\right)\beta(\alpha_1)\right] = 0$$

alırız.

$e^{-\int_\alpha^{\alpha_1} K(s)ds}$' ye bölsek ve $a_1 = -b_1$ kabul ederek

$$2b_1\left[K(\alpha_1) \cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\, ds\right) + \beta(\alpha_1) \sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\, ds\right)\right] + (a_2 - b_2)$$
$$\cdot \left[-K(\alpha_1) \sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\, ds\right) + \cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\, ds\right)\beta(\alpha_1)\right] = 0 \tag{5}$$

olur.

Green fonksiyonun 3. koşulundaki şartları yazarsak $G(t^+, t) = G(t^-, t)$ elde edilir.

Bu durumda

$(a_1 - b_1)y_1(t) + (a_2 - b_2)y_2(t) = (a_1 + b_1)y_1(t) + (a_2 + b_2)y_2(t)$ olur.

$e^{-\int_\alpha^{\alpha_1} K(s)ds}$'ye bölerek ve ifadeleri kısaltarak

$$-2b_1 e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + a_2 e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) - b_2 e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}$$

$$\cdot \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) - a_2 e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) - b_2 e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) = 0$$

yazılabilir. Bu durumda

$$b_1 \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + b_2 \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) = 0 \tag{6}$$

olur.

Green fonksiyonun 3. koşulu için,

$$G'_x(t+0,t) - G'_x(t-0,t) = \frac{1}{p} = 1$$

$$\begin{cases} G'_x(x,t) = (a_1 + b_1)y'_1(x) + (a_2 + b_2)y'_2(x), & x \le t \\ G'_x(x,t) = (a_1 - b_1)y'_1(x) + (a_2 - b_2)y'_2(x), & x \ge t \end{cases}$$

Bu durumda aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$(a_1 - b_1)y'_1(t) + (a_2 - b_2)y'_2(t) - [(a_1 + b_1)y'_1(t) + (a_2 + b_2)y'_2(t)] = 1$$

$y'_1(t)$ ve $y'_2(t)$ yerine yukarıdaki ifadeler koyulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$-2b_1 \left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}(-K(t)) \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}\left(-\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)\right)\beta(t)\right]$$

$$+a_2 \left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}(-K(t)) \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)\beta(t)\right]$$

$$-b_2 \left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}(-K(t)) \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)\beta(t)\right]$$

$$-a_2 \left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}(-K(t)) \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)\beta(t)\right]$$

$$-b_2 \left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}(-K(t)) \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)\beta(t)\right] = 1$$

Benzer ifadeleri kısaltırsak

$$2b_1\left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}K(t)\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)+e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\beta(t)\right]$$

$$-2b_2\left[e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}\big(-K(t)\big)\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)+e^{-\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\beta(t)\right]=1$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$b_1\left[K(t)\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)+\beta(t)\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\right]-\ b_2$$

$$\cdot\left[\big(-K(t)\big)\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)+\beta(t)\cos(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\right]=\frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \qquad (7)$$

elde edilir. (4), (5), (6), (7) denklemlerinden a_1, a_2, b_1, b_2, (6) ve (7) denklemlerinden ise Kramer metodu ile b_1 ve b_2 bulunur:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right) & \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right) \\ K(t)\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)+\beta(t)\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds) & \big(K(t)\big)\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)-\ \beta(t)\cos(\int_\alpha^t \beta(s)ds) \end{vmatrix}$$

$$=K(t)\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)-\beta(t)\cos^2\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)-K(t)$$

$$\cdot\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)-\beta(t)\sin^2\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)=-\beta(t)$$

$$\cdot\cos^2\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)+\ \beta(t)\sin^2\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)=-\beta(t)$$

$$\cdot\left(\cos^2\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)+\ \sin^2\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\right)=-\beta(t)$$

Şimdi Δ_1 ifadesini bulalım:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right) \\ \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds} & \big(K(t)\big)\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)-\ \beta(t)\cos(\int_\alpha^t \beta(s)ds) \end{vmatrix}$$

$$=-\ \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)$$

Şimdi de Δ_2 değerini elde edelim:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right) & 0 \\ K(t)\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)+\beta(t)\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds) & \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)$$

Buradan b_1 ve b_2 ifadelerini bulalım.

$$b_1 = \frac{\frac{1}{2} e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)}$$

$$b_2 = \frac{-\frac{1}{2} e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)}$$

Şimdi a_1 değerini bulalım:

$$a_1 = -b_1$$

$$a_1 = \frac{-\frac{1}{2} e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)}$$

a_2'yi (5) denkleminden buluruz:

$$2b_1\left[K(\alpha_1)\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)\, ds\right) + \beta(\alpha_1)\sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)\, ds\right)\right] + (a_2 - b_2)$$

$$\cdot\left[-K(\alpha_1)\sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)\, ds\right) + \cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)\, ds\right)\beta(\alpha_1)\right] = 0$$

Burada,

$$\gamma_1 = K(\alpha_1)\sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)ds\right) - \beta(\alpha_1)\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)ds\right)$$

$$\gamma_2 = K(\alpha_1)\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)ds\right) + \beta(\alpha_1)\sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\beta(s)ds\right)$$

olur.

b_1 ve b_2 de γ_1 ve γ_2 değerlerini yazarsak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$a_2 = \frac{\frac{2\frac{1}{2} e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2}{\beta(t)} - \frac{\frac{1}{2} e^{\int_\alpha^t K(s)ds} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1}{\beta(t)}}{\gamma_1}$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\left[\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2 - \frac{1}{2}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1\right]}{\beta(t)\gamma_1}$$

Şimdi $a_2 + b_2$'yi bulalım:

$$a_2 + b_2$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\left[\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2 - \frac{1}{2}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1\right]}{\beta(t)\gamma_1} - \frac{\frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)}$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2 - \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1 - \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1}$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2 - e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1} \qquad (8)$$

olur.

$a_1 - b_1$'yi bulalım:

$$a_1 - b_1 = \frac{-\frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)} - \frac{\frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)}$$

$$= \frac{-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)} \qquad (9)$$

Şimdi $a_2 - b_2$'yi bulalım:

$$a_2 - b_2$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\left[\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2 - \frac{1}{2}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1\right]}{\beta(t)\gamma_1} + \frac{\frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)}{\beta(t)}$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2 - \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1 + \frac{1}{2}e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1}$$

$$= \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_2}{\beta(t)\gamma_1} \qquad (10)$$

Green fonksiyonunu oluşturalım. Green fonksiyonu iki bölümden oluşmalıdır; birinci bölümü $G_1 = (x, t)$ fonksiyonu x'e gore sürekli türevlidir ve ikinci bölümü $G_2 = (x, t)$ türeve göre sıçrama yapar:

$$G(x,t) = \begin{Bmatrix} (a_1 + b_1)y_1(x) + (a_2 + b_2)y_2(x), & \alpha \le x \le t \le \alpha_1 \\ (a_1 - b_1)y_1(x) + (a_2 - b_2)y_2(x), & \alpha \le t \le x \le \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$a_2 + b_2,\ a_1 - b_1\ ,a_2 - b_2$ yerine (8), (9), (10) ifadeleri olmak üzere

$$G(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2 - e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1} \\ \cdot e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right),\ \alpha \le x \le t \le \alpha_1 \\ \frac{-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)}{\beta(t)} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)ds\right) \\ + \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2}{\beta(t)\gamma_1} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right), \\ \alpha \le t \le x \le \alpha_1 \end{array} \right\} \tag{11}$$

olur. Bu halde durum gerçeklenmiş olur.

$$y(x) = \int_\alpha^{\alpha_1} G(x,t)f(t)dt = \int_\alpha^x G(x,t)f(t)dt + \int_x^{\alpha_1} G(x,t)f(t)dt$$

$$= \int_\alpha^x \left[\frac{-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)}{\beta(t)} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)ds\right) + \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2}{\beta(t)\gamma_1} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\right]$$

$$\cdot f(t)dt + \int_x^{\alpha_1}\left[\frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2 - e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\right]\cdot f(t)dt \tag{12}$$

(12) förmülü ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler için hareketli sınır değer probleminin çözümünde kullanılır.

Örnek 1:

$f(x) = \beta^2(x)e^{-\int_\alpha^x K(x)dx}f_0$ genel denklemini ele alalım. Burada f_0 sabit (12) formülünü ele alarak Green fonksiyonunun koşulları sağladığını kontrol edelim:

$$y(x) = \int_\alpha^x \left[\frac{-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)}{\beta(t)} y_1(x) + \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2}{\beta(t)\gamma_1} y_2(x)\right]\beta^2(t)$$

$$\cdot e^{-\int_\alpha^t K(t)dt}f_0 dt + \int_x^{\alpha_1}\left[\frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2 - e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)ds\right)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1} y_2(x)\right]$$

$$\cdot \beta^2(t)e^{-\int_\alpha^t K(t)dt}f_0 dt$$

Bu durumda

$$y(x) = -y_1(x)f_0 \int_\alpha^x \sin(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds)\beta(t)dt + y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0 \int_\alpha^x \sin(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds)\beta(t)dt$$

$$+y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0 \int_x^{\alpha_1} \sin(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds)\,\beta(t)dt - y_2(x)f_0 \int_x^{\alpha_1} \cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\beta(t)dt$$

$$= -y_1(x)f_0 \int_\alpha^x \left(-\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\right)' dt + y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0 \int_\alpha^x \left(-\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\right)' dt$$

$$+y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0 \int_x^{\alpha_1} \left(-\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\right)' dt - y_2(x)f_0 \int_x^{\alpha_1} \left(\sin\left(\int_\alpha^t \beta(s)\,ds\right)\right)' dt$$

olur. Bu da istenen denkleme ulaşıldığını gösterir:

$$y(x) = -y_1(x)f_0\left[-\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right) + \cos\left(\int_\alpha^\alpha \beta(s)\,ds\right)\right] + y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0$$

$$\cdot\left[-\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right) + \cos\left(\int_\alpha^\alpha \beta(s)\,ds\right)\right] + y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0$$

$$\cdot\left[-\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) + \cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\right] - y_2(x)f_0\left[\sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) - \sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\right]$$

Benzeyen ifadeleri kısaltırsak

$$y(x) = -y_1(x)f_0\left[-\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right) + 1\right] + y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0\left[-\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right) + 1\right]$$

$$+y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0\left[-\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) + \cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\right] - y_2(x)f_0$$

$$\cdot\left[\sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) - \sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)\right]$$

yazabiliriz. Buradan

$$y(x) = y_1(x)f_0 \cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right) - y_1(x)f_0 + y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0 - y_2(x)\frac{\gamma_2}{\gamma_1} f_0$$

$$\cdot\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) - y_2(x)f_0 \sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) + y_2(x)f_0 \sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\,ds\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$y(x) = e^{-\int_\alpha^x K(s)ds} f_0 - y_1(x)f_0 + y_2(x)f_0\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cos\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right) - \sin\left(\int_\alpha^{\alpha_1} \beta(s)\,ds\right)\right]$$

elde edilir.

Örnek 2:

$q(x) = \frac{1}{4}p^2(x) + {\beta_0}^2 + \frac{1}{2}p'(x)$, $\beta_0 \leftarrow R$, $\beta_0 \neq 0$, $K(s) = \frac{1}{2}p(s)$, $\beta(s) = \beta_0 -$ sabit, $f(x) = f_0 e^{-\int_\alpha^x K(t)dt}$, $P(x) = x$, $\beta(t) = \beta_0 -$ sabittir.

Verilen denklemini çözelim.

Çözüm:

İlk olarak $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y'_1(x)$, $y'_2(x)$ ifadelerini bulalım:

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_\alpha^x p(s)ds} \cos[\beta_0(x-\alpha)],$$

$$y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_\alpha^x p(s)ds} \sin[\beta_0(x-\alpha)],$$

Buradan

$$y_1(x) = e^{-\int_\alpha^x K(s)ds} \cos(\int_\alpha^x \beta(s)\, ds),$$

$$y_2(x) = e^{-\int_\alpha^x K(s)ds} \sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\, ds\right),$$

olur. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ türevlerini alırsak

$$y'_1(x) = e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\big(-K(x)\big)\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\, ds\right) + e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\left(-\sin\int_\alpha^x \beta(s)ds\right)\beta(x),$$

$$y'_2(x) = e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\big(-K(x)\big)\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)ds\right) + e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)\, ds\right)\beta(x)$$

yazılır ve

$$y(x) = \int_\alpha^x \left[\frac{-e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)}{\beta(t)} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^x \beta(s)ds\right) + \frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)ds)\gamma_2}{\beta(t)\gamma_1} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\, ds\right)\right]$$

$$\cdot f(t)dt + \int_x^{\alpha_1}\left[\frac{e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\sin(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds)\gamma_2 - e^{\int_\alpha^t K(s)ds}\cos\left(\int_\alpha^t \beta(s)\, ds\right)\gamma_1}{\beta(t)\gamma_1} e^{-\int_\alpha^x K(s)ds}\sin\left(\int_\alpha^x \beta(s)\, ds\right)\right]$$

$$\cdot f(t)dt$$

elde edilir. Verilen şartları koyarak

$$y(x)=\int_{\alpha}^{x}\left[\frac{-e^{\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}sds}\sin(\int_{\alpha}^{t}\beta_0 ds)}{\beta_0}e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\cos\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)f_0 e^{-\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}tdt}\right]dt$$

$$+\int_{\alpha}^{x}\left[\frac{e^{\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}sds}\sin\left(\int_{\alpha}^{t}\beta_0 ds\right)\gamma_2}{\beta_0\gamma_1}e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)f_0 e^{-\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}tdt}\right]dt$$

$$+\int_{x}^{\alpha_1}\left[\frac{e^{\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}sds}\sin(\int_{\alpha}^{t}\beta_0 ds)\gamma_2}{\beta_0\gamma_1}e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0\, ds\right)f_0 e^{-\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}tdt}\right]dt$$

$$-\int_{x}^{\alpha_1}\left[\frac{e^{\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}sds}\cos\left(\int_{\alpha}^{t}(\beta_0 ds\right)\gamma_1}{\beta_0\gamma_1}e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0\, ds\right)f_0 e^{-\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{2}tdt}\right]dt$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$y(x)=\frac{-\cos\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}f_0}{\beta_0}\int_{\alpha}^{x}\left[\sin\left(\int_{\alpha}^{t}\beta_0\, ds\right)\right]dt+\frac{\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\gamma_2 f_0}{\beta_0\gamma_1}$$

$$\cdot\int_{\alpha}^{x}\left[\sin\left(\int_{\alpha}^{t}\beta_0\, ds\right)\right]dt+\frac{\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\gamma_2 f_0}{\beta_0\gamma_1}\int_{x}^{\alpha_1}\left[\sin\left(\int_{\alpha}^{t}\beta_0\, ds\right)\right]dt$$

$$-\frac{\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}f_0}{\beta_0}\int_{x}^{\alpha_1}\left[\cos\left(\int_{\alpha}^{t}\beta_0\, ds\right)\right]dt$$

olur. Dolayısıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$y(x)=\frac{-\cos\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)\times e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}f_0}{\beta_0}\frac{1}{\beta_0}(-\cos(\beta_0 x-2\beta_0\alpha))+\frac{\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\gamma_2 f_0}{\beta_0\gamma_1}$$

$$\cdot\frac{1}{\beta_0}(-\cos(\beta_0 x-2\beta_0\alpha))+\frac{\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}\gamma_2 f_0}{\beta_0\gamma_1}\frac{1}{\beta_0}(-\cos(\beta_0\alpha_1-\beta_0 x-\beta_0\alpha))$$

$$-\frac{\sin\left(\int_{\alpha}^{x}\beta_0 ds\right)e^{-\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}sds}f_0}{\beta_0}\frac{1}{\beta_0}(\sin(\beta_0\alpha_1-\beta_0 x-\beta_0\alpha))$$

SONUÇ

Bu tezin birinci bölümünde diferansiyel denklem için gerekli olan genel tanımlar ve bazı temel teoremler verilmiştir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde sınır değer problemi ve Green fonksiyonunun tanımı ele alınmaktadır. Üçüncü bölümde ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin hareketli sınır değer problemini çözmek için Green fonksiyonu oluşturulmuş ve yeni bir formülün elde edilmesi gösterilmiştir. Bu formülden yararlanarak yeni sınır değer problemlerinin çözülebileceği ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Егоров, А.И. (2005). Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, Москва, с.5-8.
2. Камке, Э. (1971). Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. с.139-141.
3. Самойленко, А.М., Кривошея, С.А. и Перестюк, Н.А. (1989). Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., Москва, с.220-223.
4. Yarız, E. (1998). Genel Matematik. İstanbul. ss.471-482.
5. İrfan Baki Yaşar. (1997). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Siyasal kitabevi, Ankara, ss.12-15
6. Коллатц, Л. (1968). Задачи на собственные значения. С техническими приложениями. Перевод со второго немецкого издания под общей редакцией Никольского В. В. Издательство «НАУКА», Москва,с.75-86.
7. Asanov, A., Haluk Chelik, M. and Asanov, R. (2012). One Formula for Solution of the Linear Differential Equations of the Second Order with the Variable Coefficients. ISSN 0973-1768 Volume 8, Number 3, pp. 321-328.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı:	Kalima MOLDOKULOVA
Uyruğu:	Kırgız
Doğum Tarihi ve Yeri:	08.03.1988 Kırgızistan-Bişkek
Medeni Durumu:	Bekar

Tel: +996 (555) 941957

email: kamilya.1989@mail.ru

Yazışma Adresi:

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü.	....
Lisans	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü.	2012
Lise	Sosnovka orta okulu	2005

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013-	Lise №19	Matematik öğretmeni

YABANCI DİL

Türkçe

Rusça