KIRGIZİSTAN - TÜRKİYE
"MANAS" ÜNİVERSİTESİ

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARABOLİK DENKLEM ŞEKLİNDE VERİLEN OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİKLİĞİ

Hazırlayan
Elvira ALIBEK KIZI

Danışman
Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİYEV

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2015
KIRGIZİSTAN/BİŞKEK

Yüksek Lisans Tezi Tezi Hazırlayan Elvira ALIBEK KIZI Anabilim Dalı Matematik 2015

КЫРГЫЗ-ТҮРК МАНАС УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ПАРАБОЛА ТИБИНДЕГИ ТEҢДЕМЕЛЕР МЕНЕН БАЯНДАЛГАН ОПТИМАЛДУУ МАСЕЛЕЛЕРДИН АСИМПТОТИКАСЫ

Даярдаган
Алыбек кызы Эльвира

Жетекчиси
ф.-м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев

Магистирдик диссертация

Июнь 2015
Кыргызстан/ Бишкек

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Elvira ALIBEK KIZI

İmza :

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Мен бул эмгекте алынган бардык маалыматтарды академиялык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум. Тагыраак айтканда, бул эмгекте колдонулган, бирок мага тиешелүү болбогон маалыматтардын бардыгын тиркемеде так көрсөттүм жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

Аты-жөнү: Алыбек кызы Эльвира

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Parabolik denklem şeklinde verilen optimizasyon problemlerinin asimptotikliği” adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Elvira ALIBEK KIZI	Prof.Dr. Asan ÖMÜRALİEV
İmza:	İmza:

Matematik ABD Başkanı

Prof.Dr. Avıt ASANOV

İmza:

Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİYEV danışmanlığında Elvira ALIBEK KIZI tarafından hazırlanan “Parabolik denklem şeklinde verilen optimizasyon problemlerinin asimptotikliği” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

……….. /…… / ………..

(Tez savunma sınav tarihi yazılacaktır.)

JÜRİ:

Danışman	: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİYEV	…………….
Üye	:……………………………….	…………….
Üye	:……………………………….	…………….
Üye	:……………………………….	…………….
Üye	:……………………………….	…………….

ONAY :
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ………..…. tarih ve …………..…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………. /……../ ………

Prof. Dr. Zafer GÖNÜLALAN

Enstitü Müdürü

Ф.-м. и. докт., профессор Асан Өмүралиевдин жетекчилигинде Эльвира Алыбек кызы тарабынан даярдалган “Парабола тибиндеги теңдемелер менен баяндалган оптималдуу маселелердин асимптотикасы” темасындагы магистрдик иш коммисия тарабынан Кыргыз-Түрк Манас университети Табигый илимдер институту Математика багытында магистдик иш болуп кабыл алынды.

……….. /…… / ………..

Коммисия:

Илимий жетекчи	: Ф.-м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев	…………….
Төрагасы	:……………………………….	…………….
Мүчө	:……………………………….	…………….
Мүчө	:……………………………….	…………….

Чечим :

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин …………..… датасында жана ……………..…… санындагы чечими менен бекитилди.

………. /……../ ………

Проф. Док. Зафер Гөнүлалан

Институт Мүдүрү

АЛГАЧ СӨЗ

Билимди тереңдетүүгө, илим жолуна биринчи кадам таштоого эбегейсиз зор салымын кошкон илимий жетекчим ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев агайга терең ыраазычылыгымды билдирем.

Эльвира Алыбек кызы

Бишкек, Июнь 2015

ПАРАБОЛА ТИБИНДЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР МЕНЕН БАЯНДАЛГАН ОПТИМАЛДУУ МАСЕЛЕЛЕРДИН АСИМПТОТИКАСЫ

Алыбек кызы Эльвира

Кыргыз-Түрк Манас Университети, Табигый илимдер институту

Магистрдик иш, июнь айы 2015

Илдимий жетекчи: ф. м. и. докт., профессор Асан Өмүралиев

Кыскача мазмуну

Бул иште башкаруу процессинин чыгарылышынын регулярланган асимптотикасы тургузулган. Кичине параметр мейкиндик туундусунун алдында турган параболалык типтеги диференциалдык теңдеме менен баяндалган оптималдуу башкаруу маселесин чыгаруу.

Бул иш 3 бөлүмдөн турат. Биринчи бөлүмдө адабияттарды изилдөө, экинчи бөлүмдө оптималдуу башкаруу, дүүлүккөндүк, регулярдуу жана сингулярдуу дүүлүккөндүк жөнүндө кыскача теория берилди. Ал эми үчүнчү бөлүмдө маселенин коюлушу, аны регулярлоо жана итераттык маселелерди чыгаруу аркылуу сингулярдуу дүүлүккөн маселенин чыгарылышынын оптималдык асимптотикасы тургузулду.

Ачкыч сөздөр: Асимптотика, сингулярдуу дүүлүккөн маселелерди бөлүштүрүлгөн параметрлер менен оптималдуу башкаруу, параболалык чектик башкаруу.

PARABOLİK DENKLEM ŞEKLİNDE VERİLEN OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİKLİĞİ

Elvira ALIBEK KIZI
Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2015
Danışman: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİYEV

GENİŞ ÖZET

Bilimsel çalışmaların ve teknolojinin gelişmesiyle insanlar daha çok bilimsel araştırmalarının sayısını artırmaya mecbur kaldılar. Araştırma sırasında bilimsel çalışmaları anlamak, üzerinden işlemleri yapmak için kullanılan teoremlerinin içinde Matematik sistemi daha fazla önemi vardır. Matematiğin diğer bilimlerindeki uygulamalarına geçmeden önce insan hayatında da ne kadar önemli bir yeri olduğuna değinmek yerinde olur. Matematik konusunda eğitimi Matematiğin diğer bilimlerindeki uygulamalarına geçmeden önce insan hayatında da ne kadar önemli bir yeri olduğuna değinmek yerinde olur. Matematik konusunda eğitimi olmayan insanlar matematik deyince sadece cebirsel işlemleri anlarlar. Halbuki insanların hayatlarını kolaylaştıran pek çok şeyde matematiğin çok önemli bir yeri ve önemi vardır. Modern bilimin insanların hizmetine sunduğu ve günlük hayatta kullanılan dijital saatler, televizyon, cep telefonu, bilgisayar, otomobiller, ısıtma sistemleri, her tür medya cihazı v.b. insanların hayatını kolaylaştıran şeylere örnek olarak verilebilir. Matematik, fen bilimlerinde, sosyal bilimlerde hatta sağlık bilimlerinde uygulanarak bu bilimlerin gelişmesine katkıda bulunmaktadır. Bu tür bilimlerde karşılaşılan problemlerin çözülebilmesi için önce matematiksel modelinin kurulması daha sonra da bu modele göre problemin çözülmesi gerekir. Bu açıdan diğer bilimler matematik olmadan bir adım dahi ilerleyemezler. Bir mühendisin hazırladığı projede matematiksel hesaplamalar yapmadan projesini tamamlaması mümkün değildir. Ekonomistler matematiksel temelleri olmadan gerekli hesapları yapıp değerlendirmelerini yapamazlar. Hava durumu tahmini yaparken bile matematiksel teoriler temel alınarak tahminler yapılır.

Matematik analiz ve Matematik modelleme bu işlemleri daha hızlı ve en yakın sonuçları alabilmek için kullanılmaktadır. Bügünlerde kullandığımız modern ve hızlıca

gelişen araştırmaları otomatik çalıştırmak mümkün değildir. En başlarda otomatik işletim teorisi en kolay işlemleri yapardı, bu işlemlerin matematik modelini de kolay diferansiyel denklemlerle çözülürdü. Bu prosedür toplanan parametreler sistemi denir. Sistem için çok araştırmalar yapılmıştır. Daha zor işlemler için aşağıdaki prosedürlere bakarak sonuçları alabiliriz.

Teknolojinin gelişmesiyle matematik modellemenin daha da zorlaşmasının nedeni oldu. Bu nedenle analiz yapmak için asimptot metodunu kullanmaya başladılar.

Matematik veya Fen bilimlerinde asimptot metodu matematik nesneler için en kolay asimptot metodunu kullanarak bu işi daha azaltır. Asimptot metodu çok yönlü, ve bu metod insanların amacına ulaşabilmesi için yol gösterir.

Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözümlenemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemden yola çıkılarak yaklaşık bir çözüm elde etmek için matematiksel metotlar içeren teoridir. Kesin olarak çözümlenebilen problemin matematiksel tanımına "küçük" bir terim eklenerek eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilirdir.

Pertürbasyon teorisi, istenilen çözümün, kesin çözümlü problemden sapmanın miktarını belirleyen "küçük" parametre kullanılarak kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesine öncülük eder. Kuvvet serisinin ana terimi, kesin çözümlü problemin çözümü; diğer terimler ise ilk problemden sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar.

e: küçük parametre A: tam çözüm

Tam çözüme yaklaşımlı çözüm: $A=e^0A_0+e^1A_1+e^2A_2...$

A_0: kesin çözümlü problemin çözümü

$A_1, A_2, ...$: *higher order* sistematik prosedürde tekrarlanarak bulunan terimler

Pertürbasyon çözümü, yaklaşım serilerini belli bir noktada kesmekle yapılır. Genellikle çözüm, ilk iki terim $A_0+e^1A_1$ de kesilebilir. Bu I. dereceden pertürbasyon düzeltmesi ve ilk çözümüdür. Pertürbasyon teorisi eski bir yöntem olan nümerik analizde kullanılan metotlarla ilişkilidir. Pertürbasyon teorisinin ilk kullanımı gök mekaniğinin çözümlenemeyen matematiksel problemleri ile başa çıkmada görülür

Optimal kontrol. Maksimum prensibin uygulayarak optimum şartların bulurken en kolay meseleyi alalım. Ne zaman verilen denklem bir tipte ve bir sonuça yakın olan şartlarda ışı iletimi denklemine katlanacaktır. Bu halde optimum şartı her türlü yöntemle alınabilir ama bazıları için bu metod geçerli değildir. Fonksiyonu minimum prensibin kullanmak mümkündür ve zor meseleler için etkilidir.

Bu yüksek lisans tezin amacı idare süreç çözümü düzenlenmiş asimptotiği bulunmuştur.Belirli osimptotların tanımlı differensiyenllerde parabolik tipteki çözum süreçleri uzaysal türev yönünden incelecektir.

Bu yüksek lisans tezi 3 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür taranması ve genel bilgiler , ikinci bölümde ise optimal kontrol, tedirğinlik ve bireysel tedirginlik hakkında kısa teori verilmiştir. Üçüncü bölümde dağıtılmış parametreleri ile singular tedirgin optimal kontrol problemin konulmuş ve tedirğin problem regulerize edilerek çözümünün asimptotiği bulunmuştur. Bulunan çözümün asimptotiği konulan problemin asimptotiği olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Çözümlerinin asimptotik davranışı, dağıtılmış parametreleri ile singular tedirgin optimal kontrol problemi, paraboliksinir tabakasi.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОПИСАННЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ.

Алыбек кызы Эльвира

Кыргызско-Турецкий Университет Манас, Институт Естественных наук

Магистерская работа, июнь 2015

Научный руководитель: д. физ.-мат. н., профессор Асан Омуралиев

Аннотация

Строится регуляризованная асимптотика решения управляемого процесса, описываемого дифференциальным управлением параболического типа с малым параметром при пространственной производной, когда распределенное управление входит в управление объекта.

Ключевые слова: асимптотика решения, сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с распределенными параметрами, параболической пограничный слой.

ASYMPTOTE OF PARABOLIC EQUATIONS GIVEN IN THE FORM OF OPTIMIZATION PROBLEM

Elvira Alybek Kyzy
Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Institute of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, June 2015
Supervisor: Prof. Dr. Asan OMURALIEV

Abstract

Built regularized asymptotics of the solution of the controlled process, which is described by the differential control of parabolic type with a small parameter in the spatial derivative when distributed control enters the control object

Keywords: Singularly perturbed parabolic problem, asymptotic, stationary.

МАЗМУНУ

ПАРАБОЛА ТИБИНДЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР МЕНЕН БАЯНДАЛГАН ОПТИМАЛДУУ МАСЕЛЕЛЕРДИН АСИМПТОТИКАСЫ

ҮЧҮНЧҮ БӨЛҮМ

Символдор

$\varepsilon > 0$ – кичине параметр

$\Omega = \{ (x, t): x \in (0, 1),\ t \in (0, T]\}$.

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$\partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-s^2)\, ds.$$

Киришүү

Билимдин жана техниканын кескин өнүгүүсү, өдүрүш технологияларынын татаалданышы адамдарды андан терең изденүүгө дуушар кылды. Аларды окуп, негизин түшүнүүдө теоретикалык анын ичинде математиканын ролу чоң. Математикалык анализ жана математикалык моделдөө мындай процесстерди бат жана терең изилдөөгө мүмкунчүлүк түзөт. Бүгүнкү күндө заманбап, татаал, бат өсүүчү процесстерди кошумча автоматтык башкаруу системаларысыз ишке ашыруу мүмкүн эмес. Башында автоматтык башкаруу теориясы алда канча жөнөкөй процесстер менен иш алып барчу, мындай процесстердин математикалык моделин жөнөкөй дифференциалдык теңдемелер менен түзүүгө мүмкүн болчу. Мындай процесстер жыйналган параметрлер системасы деп аталат. Буларга көптөгөн изилдөөлөр арналган жана жакшы изилденген. Ал эми оор процесстерди төмөнкү түшүнүктөрдү колдонуу менен кана тиешелүү жыйынтыкка жетүүгө болот.

Илимдин жана техниканын ыкчам өнүгүүсүндө чыныгы дүйнөнүн математикалык модели татаалдашууда ушул себептен буларды анализдөө үчүн асимптотикалык ыкманы колдонуу жат көрунүш.

Математикада же так илимдин башка бөлүктөрүндө асимптотикалык анализ бул кандайдыр бир математикалык же башка объектери алда канча жөнөкөй кылып аппросимациялоо болуп саналат. Асимптотикалык анализ кыйла көп кырлуу, ал дайыма адамга эң жакшы жол менен түбөлүктүү умтулууга жардам берет.

Дүүлүккөндүүлүктүн изилдөөгө тийгизген таасири оптималдуу маселелерли чыгарууда теориялык эле эмес практикалык мааниси да өтө маанилүү. Оптималдуулуктун шарты боюнча сингулярдуу дүүлүккөн маселелер үчүн чектик маселелер пайда болот. Ошондуктан сандык чыгарууда оорчулуктарды жаратат. Мындан улам асимптотикалык методдордун ролу чоң болуп, колдонуунун көчүлүк учурунда негизги математикалык модели алда канча жөнөкөйлөйт.

Биринчи бөлүм

1.1 Адабияттарды изилдөө.

Сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин математикалык теориясы мурунку кылымда эле өнүгө баштаган. Сингулярдуу дүүлккөндүүлүк боюнча биринчи жыйынтык катары Лиувилдин ишин айтса болот, параметри чексизге умтулган эикинчи тартиптеги теңдемин жакындаштырылган чыгарылышын тапкан [1]. 1899 жылы Хорн жумушуна кайрылып келип экинчи тартиптеги теңдемени асимптотиканы тургузуу жолу менен изилдейт [2]. Ал эми 1904-жылы Прандтль Навье-Стокстун четтик катмар концепциясын камтыган сингулярдуу дүүлүккөн системасын изилдеген [3]. 1907-жылы Шлезингер [4], 1908-жылы Биркгоф каалаган тартиптеги сингулярдуу дүүлүккөн кадимки дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын түзүмүн изилдөөдөгү математикалык маселени чыгарган [5]. Ушул эле маселенин жалпы коюлушун 1934-жылы Тржидзинский чыгарган [6-7].

1940-жылдарда сингулярдуу дүүлүккөндүүлүк теориясы систематикалык түрдө өнүгүүдө болгон, ошол учурда математиктердин бул темада көнүлүн Тихонов А. Н. жана Вазов В. окумуштуулардын иштери бурган [8-9]. Так ушул убакыттан баштап сингулярдуу дүүлүккөндүүлүк советтик мектеби жемиштүү өнүүгүлөргө ээ болгон. (мисалы, [10-11]). Окумуштуу Тихоновдун белгилүү пределдик өтмө жөнүндөгү теоремасын тастыктап жатканда калыптанган идеясын өнүктүрүп Васильев А.Б. жана Иманалиев М. И. четтик функциялар методун иштеп чыгышкан. Аталган окумуштуулар жана алардын окуучулары тарабынан бул метод ар тараптуу өнүктүрүлгөн (Мисалы: [9-10], [10-11] ж. б.). Бул методдун кадимки дифференциалдык жана айрым туундулуу теңдемелерге колдонулушу жогорку деңгээлде эффективдүү болгон. Биринчи жолу четтик катмарды математикалык түрдө баяндап жана аларды кээ бир айрым туундулуу теңдемелер үчүн четтик маселелер классына колдонгон Вишик М. И., Люстерник Л. А. болгон [11].

Маслов В. П. тарабынан иштелип чыккан каноникалык оператор методу сызыктуу эмес сингулярдуу дүүлүккөн маселелерди изилдөөгө өбөлгө түзөт.

Методдун мазмуну жана негизги жыйынтыктар белгилүү эки монографияда көргөзүлгөн [12-13].

Экспоненциалдык өзгөрүү мүнөздүү четтик катмар тибиндеги функцияларды камтыган сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселелердин асимптотикалык чыгарылышы тургузулган [14-22].

Исакова Е.К. нын [14-15] - иштери чыгарылыштын асимптотикалык көргөзүлүшүнө арналып, ал эми Исакова Е.К. жана Треногий В.А [15-16] - иштеринде четтик катмар тибиндеги асимптотика тургузулуп жана тургузулган чыгарылыштын асимптотикасы параболалык четтик катмар тибиндеги функцияны камтыйт.

Олуттуу маселелер жылмакай эмес областта каралып жаткан сингулярдуу дүүлүккөн маселелерди изилдөөдө ортого келип чыгат. Мындай учурда областтын аймагында бурчтук чекиттердин, кошумча четтик катмарлардын келип чыгышынын негизинде асимптотикалык анализ жүргүзүү кыйла оор. Вишик-Люстерник-Васильев-Иманалиевдердин методунун идеясынын негизинде Бутузов В. Ф. бурчтук четтик функциялар методун иштеп чыккан [21-22]. Бутузов В. Ф. методунун алгоритми жогоруда аталган кыйынчылыктарды жылмакай эмес чектүү маселелердин кеңири классы үчүн жокко чыгарат. Сингулярдуу дүүлүккөн параболалык маселелердин мезгилдүү чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу үчүн Васильев А. Б. жана анын окуучуларынын иштери арналган [23-24].

Жогоруда аталган методдор, демейде сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелердин белгилүү гана классына колдонулат. Методдун каралып жаткан шарттарына жараша бул класс чектик системанын негизинде бөлүнүп алынат. Мисалы: Вишик-Люстерник-Васильев-Иманалиевдердин методу экспоненциалдык четтик катмарлуу маселелерде колдонулат. Маселеге жооп берген чектер пределдик оператордун спектринин ачык жарым тегиздикте жайгашуусунун шарттарына карата болот. Бул чектер термелүү процесстерин баяндаган сингулярдуу дүүлүккөн маселелердин кеңири жана маанилүү классын кароону чектейт. Термелүү тибиндеги маселелерге демейде Крылов-Боголюбов-Митропольскийдин ортолоштуруу методу колдонулуп келе жатат.

Жогоруда аталган методдордун ар биринин максаты жакындаштырылган чыгарылышты табуу болгонуна карабастан, мындай методдор так чыгарылышты алуу үчүн кандай шарттар керек экендигин изилдебейт. Ар бир методдун максаты

$$\|y\,(t,\epsilon) - y_{\epsilon,N}(t)\| < c\epsilon^{N+1}, (0.0)$$

баалоосун канааттандырган $y_{\epsilon,N}(t)$ жакындаштырылган чыгарылышынын асимптотикалык аппроксимациясын түзүү болуп эсептелинет. Бул жерде $y\,(t,\epsilon) -$ сингулярдуу дүүлүккөн маселенин так чыгарылышы ($y\,(t,\epsilon)$ –так чыгарылыш тургузулбайт, жөн гана анын жашашы далилденет). Демейде (0.0)-дагы c турактуусу аппроксимациянын тартиби Nден көз каранды. c турактуусу Nдин өсүшү менен бирге өсүшү мүмкүн, ошондуктан жакындаштырылган чыгарылыш $y_{\epsilon,N}(t)$, N чексизге умтулганда так чыгарылышка умтулбайт. Жогоруда аталган методдордо $N \to +\infty$ учурда $y_{\epsilon,N}(t) \to\ y\,(t,\epsilon)$ каралган эмес.

1960-жылдарда сингулярдуу дүүлүккөндөрдүн теориясында Ломовдун регуляризациялоо методу өнүүгө баштаган [25]. Аталган методдун максаты сингулярдуу дүүлүккөн маселердин спектиринин жайгашуусуна карабастан бардык түрүнө колдонуу болгон. Методдун негизинде сингулярдуу дүүлүккөн маселерге өзгөрмө операторлордун спектрдык теориясы жана асимптотикалык катар түшүнүгү жатат.

Сингулярдуу дүүлүккөн маселер үчүн регулярлоо методу Валиев М.А., Валиев М.А., Ломов С. А, Рыжих А. Д, Елисеев А.Г дин иштеринде оператордук жана абстракттык, гильберт мейкиндигиндеги теңдемелер үчүн жалпылынган [26-27], [28], [29].

Оптималдык башкаруу теориясынын онүгүүсүн Понтрягиндин максимум принциби менен байланыштырышат [30]. Оптималдык поцесстердин математикалык теориясы максимум принцибине негизделип көптөгөн оптималдуу башкаруу маселелеринин теориялык негизи боло алган. Сингулярдуу дүүлүккөн оптималдуу башкаруу маселеси тургуузулат жана түшүндүрүлөт [31]. ε нөлгө умтулганда учурда оптималдуу башкаруу мселелерин чыгауу [32].

Экинчи бөлүм

2.1 Оптималдуу башкаруу

Максимум прицибиндеги оптималдуулук шартын кароодо биринчи жөнөкөй маселени талдоодон баштайлы. Качан теңдеме бир типтүү бир типтүү чектик шарттары болгон бир тектүү жылуулук өткөргүч теңдемеси менен сүрөттөлгөн жана башкаруу функциясы өзүнө камтылганда. Бул учурда оптималдуулук шартын ар кандай жол менен алса болот, кайсы бирөөнө тиешелүү деп айтуу кыйын. Бирок бул жерле функционалды минималдаштырууга алып келүү ыкмасы колдонулат башкача айтканда бул ыкма оор маселелерде ыкмалардын эң эффективдүүсү болуп саналат.

Оптималдуулук шарты

Маселенин койулушу:

Бир тектүү эмес жылуулук өткөргүч теңдемеси менен сүрөттөлгөн башкаруу процессин карайлы.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t,x) + f(t,x), \qquad 0 < t \ll T, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.1.1}$$

Баштапкы жана чектик шарттары

$$u(0,x) = 0, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0 \;\; \alpha = const > 0, \tag{2.1.3}$$

$f(t,x) -$ берилген функция

$p(t,x) -$ башкаруучу функция

$L_2(Q), \quad Q = \{0 \le t \le T, \qquad 0 \le x \le 1\}$

$|p(t,x)| \le 1.$ **(A)**

Мындан ары бул башкарууга башка көз карандылык формасын мүнөздөөчү p нын мейкиндик координатасы x жана убакыт t дан көз каранды болгон чектөөлөрүн киргизебиз.

Бул чектөөлөр төмөнкү учурларды берет. Кээ бир учурда $p(t,x)$ функциясы $q(x)r(t)$ түрдө көрсөтүлөт, мында $q(x)-$ берилген функция $L_2(0,1)$ ге тиешелүү болгон ал эми $r(t)-$ башкаруу функциясы. Башка учурда q менен r орун алмашып $r(t)-$ берилген функция ал эми $q(x)-$ башкаруу функциясы болот. Мындай типтеги башкаруу функциялары кызыгууну жаратат.

Белгилей кетчү нерсе көрсөтүлгөн шарттарда ар бир башкаруу сөз жок $u(t,x)$ ны аныктайт, ал дээрлик баардык жерде Q да (2.1.1) теңдемесин (2.1.2), (2.1.3) шарттарда баардык t,x үчүн канааттандырат.

Каралып жаткан оптималдуу башкаруунун максаты $p^0(t,x)$ башкаруусун жана ага туура келген (2.1.1) - (2.1.3) маселесиндеги $u^0(t,x)$ чыгарылышын табу болуп саналат. Мында функционал

$$I=\int_0^1[u(T,x)-\varphi(x)]^2\,dx+\beta\int_0^1\int_0^T p^2(x,t)\,dxdt,\ \ \beta=const>0,$$

$p=p^0$ болгондогу $u=u^0$ дун эң кичине маанисин алат. Мында $T-$ фиксирлеген убакыт учуру ал эми $\varphi(x)$ $L_2(0,1)$ деги берилген функция.

Оптималдуулук шартын алуу үчүн $p(t,x)$ башкарауу функциясын (2.1.1) - (2.1.3) маселесиндеги туура келген чыгарылышы $u(t,x)$ аркылуу белгилеп алабыз. p башкаруусун Δp катары алып аны Δu аркылуу белгилейбиз. Анда $\Delta u(t,x)$ функциясы төмөнкү четтик маселенин чыгарылышы болот.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Delta u}{\partial t}=\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}+\Delta p(t,x)\\&\Delta u(0,x)=0,\\&\left.\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\left.\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x}+\alpha\Delta u\right)\right|_{x=1}=0.\end{aligned}\right\}\tag{2.1.4}$$

Ал эми функционал төмөнкүгө ээ болот.

$$\Delta I = 2\int_0^1 [u(T,x)-\varphi(x)]\Delta\, u(T,x)dx + 2\beta\int_0^1\int_0^T p(x,t)\Delta\, p(x,t)\, dxdt +$$

$$+\int_0^1 [\Delta u(T,x)-\varphi(x)]^2\, dx + \beta\int_0^1\int_0^T \Delta p^2(x,t)\, dxdt. \qquad (2.1.5)$$

$\psi(t,x) \in W_2^{0.1}(Q)$ функциясын алсак анда

$$\int_0^T\int_0^1 \psi(t,x)[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-p(t,x)-f(t,x)]dxdt = 0$$

Теңдемин сол жагын $A[\psi,p]$ деп белгилеп

$$\Delta A[\psi,p] = A[\psi,p+\Delta p]-A[\psi,p] = \int_0^T\int_0^1 \psi(t,x)[\frac{\partial\Delta u}{\partial t}-\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}-\Delta p]dxdt = 0 (2.1.6)$$

Бөлүктөп интегралдап

$$\int_0^T\int_0^1 \psi\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}dxdt = \int_0^T \psi\frac{\partial\Delta u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}dxdt =$$

$$= -\alpha\int_0^T \psi(t,1)\Delta u(t,1)\, dt - \int_0^T\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}dxdt$$

Бул жерден биз Δu четтик маселесинин чыгарылышы катары колдондук. Эми (2.1.6) барабарсыздыгын төмөнкүчө жазсак болот

$$\Delta A[\psi,p] = \int_0^T\int_0^1 [\frac{\partial\Delta u}{\partial t}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x} - \Delta p\psi]dtdx + \ \alpha\int_0^T \psi(t,1)\Delta u(t,1)\, dt = 0 \ (2.1.6')$$

Буга чейин ψ(x,t) функциясы $W_2^{0.1}(Q)$ мейкиндигиндеги каалагандай чыгарылыш болчу эми четтик маселенин чыгарылышы катары аныктайлы.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} = 0, 0 \le t < T, 0 < x < 1, \qquad (2.1.7$$

$$\frac{\partial\psi(t,0)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\psi(t,1)}{\partial x}+\alpha\psi(t,1)=0, \tag{2.1.8}$$

Мында

$$u(t,x)-p(t,x),$$

Башкаруусуна туура келген четтик маселенин чыгарылышы (2.1.1) − (2.1.3),ал эми $\varphi(x)-I$ функциянальн аныктоодо көрүнүктүү функция болуп саналат.

Ошондой эле (2.1.7) – (2.1.9) маселесинде жалпы чыгарылыш катары $W_2^{0.1}(Q)$ мейкиндигиндеги ψ(x,t) функциясы жалпы чыгарылыш катары каралат, төмөнкү интегралдык теңдештикти канааттандырат

$$2\int_0^1[u(T,x)-\varphi(x)]\Phi\,(T,x)dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^1[\psi\frac{\partial\Delta u}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}]dxdt+\alpha\int_0^T\psi(t,1)\,\Phi(t,1)dt=0 \tag{2.1.9}$$

t=0 болгондо $\Phi\in W_2^{0.1}(Q)$ деги бардык функциялар нөлгө айланат.

$\varphi(x)\in L_2(0,1)$ жана $u(T,x)\in L_2(0,1)$ болгондуктан $\psi(t,x)$ сөз жок аныкталат.

$(2.1.6')$ жана (2.1.9)дон $\Phi=\Delta u$ деп

$$2\int_0^1[u(T,x)-\varphi(x)]\Delta\,(T,x)dx+\int_0^T\int_0^1\Delta p\psi\,dxdt=0.$$

Мындан улам (2.5) теги ΔI чоңдугун төмөнкүчө көрсөтсөк болот.

$$\Delta I=-\int_0^T\int_0^1\Delta p[\psi-2\beta p]dxdt+$$

$$+\int_0^1[\Delta u(T,x)]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1[\Delta p(t,x)]^2\,dxdt \tag{2.1.10}$$

Эгерде (2.1.10) формуласында $p=p^0, p=p^0, u=u^0, \psi=\psi^0$ десек анда

$$-\int_0^T\int_0^1 \Delta p[\psi^0-2\beta p^0]dxdt+\int_0^1[\Delta u(T,x)]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1[\Delta p(t,x)]^2\,dxdt\,.\geq 0$$

калагандай $\Delta p(t,x)$ үчүн $\Delta u(t,x)$ чыгарылышы туура келгендей.

(2.1)-(2.3) четтик маселесинде $p^0(t,x)$ башкаруусу жана анын тиешелүү чыгарылышы $u^0(t,x)$ оптималдуу болуусу үчүн $\psi^0(t,x)$жана $\Delta p(t,x)$ төмөнкү барабарсыздыкта орун алуусу жетиштүү

$$\int_0^T\int_0^1 \Delta p[\psi^0-2\beta p^0]dxdt\leq 0 \qquad (2.1.11).$$

Эгерде $H(\psi^0,u^0,p^0)=(p^0\psi^0-\beta(p^0)^2$ функциясын киргизсек анда (2.1.11) нин ордуна

$$\int_0^T\int_0^1 [H(\psi^0,u^0,p^0)-H(\psi^0,u^0,p^0)]dxdt\leq 0 \qquad (2.1.12)$$

Барабарсыздыгын алсак болот. (2.1.12) барабарсыздыгы төмөнкү барабардыка эквиваленттүү

$$H(\psi^0,u^0,p^0)(=)\max_p H(\psi^0,u^0,p) \qquad (2.1.13)$$

Жогорудагыларды эске алып мындай жыйынтыкка келсе болот. Эгерде (А) шартын алып таштаса анда башкаруунун жалгыз чыгарылышын аныктоо оптималдуулуктун жетиштүү шарты болуп саналат.

Баардык шарттарды эске алып төмөнкү теореманы алсак болот.

Теорема (Максимум принциби).

(2.1)-(2.3) четтик маселесинин $p^0(t,x)$ башкаруусу жана ага туура келген $u^0(t,x)$ чыгарылышы оптималду болуусу үчүн , H функциясы, $u=u^0$ болгондогу ψ^0 (2.1.7)-(2.1.8) четтик маселесинин чыгарылышы болгон (2.1.13) шартын канаатандырышы, зарыл жана жетиштүү.

2.2 Дүүлүккөндүк

Математикалык дүүлүккөндүк кичине же болбосо чоң параметрлердин жардамы менен баяндалат. Асман механикасында кичине параметр катары $\varepsilon = \frac{m_1}{m}$, m_1 планетасынын массасынын күндүн m массасына болгон катышын көргөзгөн чоңдук болушу мүмкүн. Ал эми тескери чоңдук чоң параметрдин ролун ойношу мүмкүн. Демейде кичине параметрдин даражасына карата түзүлгөн катар дүүлүккөн теңдеменин чыгарылышына жыйналса дүүлүккөндөр теориясынын катары деп аталат. Жогоруда айтылгандардын негизинде дүүлүккөн процесс дүүлүкбөгөн процесстердин маанилүү эмес өзгөрүшүнө алып келет деген түшүнүктү жаратышы мүмкүн. Бирок мындай түшүнүк регулярдуу дүүлүккөндөр үчүн гана туура.

Мисал катары жөнөкөй алгебралык теңдемени карап көрөлү:

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\; a \neq 0 \quad (2.2.1)$$

Жогорку теңдеменин $0 < \varepsilon \ll 1$ аралыгында ε кичине параметри менен мүнөздөлгөн дүүлүккөндүрүлгөн учурдагы тамырларын карап корөлү. (2.2.1) теңдемесинде биринчи кошулуучу негизги мүчө, теңдеменин эки тамыры бар экенин көргөзөт. Экинчи жана үчүнчү кошулуучу- багыныңкы мүчөлөр. Багыныңкы мүчөлөрдүн бирөөсү дүүлүккөндүктүн ролун ойносун дейли:

$$ax^2 + \varepsilon bx + c = 0, \quad (2.2.2)$$

$\varepsilon = 0$ болгон учурда дүүлүктүрүлбөгөн теңдемени алабыз. $y_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ жана $y_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ тамырларына ээ болгон $ay^2 + c = 0,$ (2.2.3) теңдемесин алабыз.

Каралып жаткан маселеде дүүлүккөндүк регулярдуу болгондуктан, дүүлүктүрүлгөн теңдеменин эки тамыры тең x_1 жана x_2 тамырларына бир аз гана өзгөрөт. Экинчи тартиптеги тендемене болгон учурда тамырларды таап жогоруда айтылгандарды далилдөөгө болот. (2.2.2) теңдемесинен төмөнкүлөрдү табалы:

$$x_1 = \frac{-\varepsilon b + \sqrt{\varepsilon^2 b^2 - 4ac}}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a}} - \varepsilon \frac{b}{2a} + \varepsilon^2 \frac{b^2}{8a\sqrt{-ac}} + \cdots \qquad (2.2.4)$$

$$x_2 = \frac{-\varepsilon b - \sqrt{\varepsilon^2 b^2 - 4ac}}{2a} = -\sqrt{-\frac{c}{a}} - \varepsilon \frac{b}{2a} - \varepsilon^2 \frac{b^2}{8a\sqrt{-ac}} + \cdots \qquad (2.2.5)$$

Чындыгында эле регулярдуу дүүлүккөн теңдеменин тамырлары дүүлүкпөгөн теңдеменин тамырларынан $\varepsilon,\ \varepsilon^2$, ε^3 ...тартибиндеги кичине кошумчага айырмаланат. (1.4) жана (1.5) катарлары $\left|\frac{\varepsilon^2 b^2}{4ac}\right| < 1$ шарты аткарылса жыйналат. Ал эми сингулярдуу дүүлүккөн теңдемени карасак, ал үчүн төмөнкү теңдемени алалы:

$$\varepsilon a x^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \qquad (2.2.6)$$

Мында дүүлүккөндүктүн ролун теңдеменин негизги мүчөсү аткарат. $\varepsilon = 0$ болгон учурда

$$by + c = 0, y_1 = -\frac{c}{b}, b \neq 0. \qquad (2.2.7)$$

Көрүнүп тургандай дүүлүкпөгөн теңдеме бир гана тамырга ээ, ал эми дүүлүккөн теңдеме эки тамырга ээ. Мында сингулярдуу дүүлүккөн менен регулярдуу дүүлүккөндүктүн айырмасы көрүнөт. Эми (2.2.6) сингулярдуу дүүлүккөн тендеменин эки тамырын табалы. Алар төмөндөгүдөй болушат:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon ac}}{2\varepsilon a} = -\frac{c}{b} - \varepsilon \frac{ac^2}{b^2} - \varepsilon^2 \frac{2a^2c^3}{b^4} - \cdots \qquad (2.2.8)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\varepsilon ac}}{2\varepsilon a} = -\frac{b}{a\varepsilon} + \frac{c}{b} + \varepsilon \frac{ac^2}{b^3} + \cdots \qquad (2.2.9)$$

(2.2.8) жана (2.2.9) салыштырып карай турган болсок, сингулярдуу дүүлүккөн теңдеменин бир тамыры (2.2.7) регулярдуу дүүлүккөн теңдеменин кичине кошумчаларга гана айырмаланат. Ал эми (2.2.9) туюнтмасы менен берилген экинчи тамыр дүүлүкпөгөн теңдеменин тамыры менен эч кандай байланышы жок. $\varepsilon \to 0$ учурда экинчи тамыр абсолюттук чоңдугу боюнча чексиз өсөт, мындай учурда кичине кошумчалар тууралуу сөз кылууга болбойт.

x_2 тамырынын сингулярдуу бөлүгү кыскартылган теңдемеден аныкталгандыгын байкоого болот.

$$\varepsilon a y^2 + b y = 0, y_2 = -\frac{b}{\varepsilon a}, \quad (y_1 = 0),$$

y_2тамырына карата (2.2.9) туюнтмасындагы калган мүчөлөр кичине кошумчалардын ролун ойнойт десек болот.

Ушундай жол менен төмөндөгүдөй жыйынтык алынат: регулярдуу учурда дүүлүкпөгөн теңдемеге дүүлүккөндүк кичине гана өзгөртүү алып келсе, сингулярдуу болгон учурда толук аналогия байкалбайт. Мындай учурларда регулярдуу учурлар каралган методдордон айырмаланган атайын методдор менен изилдөө керек.

(2.2.2) регулярдуу дүүлүккөн теңдеменин тамырларын ε даражаларына карата катар менен аныктоо үчүн төмөнкү түрдөгү катар жетиштүү болот.

$$x_i = x_0^i + \varepsilon x_1^i + \varepsilon^2 x_2^i + \cdots, i = 1, 2 \ldots \qquad (2.2.10)$$

(2.2.2) теңдемесине коюп ε бирдей даражаларында коэффициенттерди барабарлоо керек. Алынган теңдемелерден (2.2.10) x_j^i катарынын бардык коэффициенттери табылат. (2.2.6) сингулярдуу дүүлүккөн теңдеме болгон учурда биринчи тамырды Пуанкаре методу менен аныктоого болот. Жөнөкөй алгебралык теңдеме болгон учурда (2.2.9) катарын жогоруда аталган схема аркылуу аныктоого болот, ал эми жалпы учурда - дифференциалдык теңдеме болгон учурда маанилүү деңгээлде оор.

2.3 Сингулярдуу дүүлүккөндүк

Маселелерде сингулярдуулук ар түрдүү болушат. Физикалык кубулуштардын жакындаштырылып баяндалышынын негизинде пайда болгон четтик өзгөчөлүктөр, жарылуулар, тез өтмөлөр сыяктуу дүүлүккөн маселелер кездешет [25]. Демейде бардык мындай кубулуштар математикалык түрдө текши эмес жыйналуучулук менен баяндалат, ал эми операторлор кичине же чоң параметрлерди камтыйт.

Мындай маселелерге мисал катары серпилгичтүүлүк теориясынан жөнөкөй маселе карап көрөлү. Узунунан жана туурасынан ийилүүнүн сызыктуулаштырылган теориясынан белгилүү болгондой балканын өлчөмсүз координаттагы ийилүүсү төмөнкү маселени канааттандырат:

$$L_\varepsilon\omega \equiv \varepsilon^2\frac{d^4\omega}{dx^4} - \frac{d^2\omega}{dx^2} = p(x),\;\; \omega(0) = \omega(1) = \frac{d\omega(0)}{dx} = \frac{d\omega(1)}{dx} = 0, \qquad (2.3.1)$$

Мында $p(x)$-сырткы жүк. Чектик шарттар балканын учтары бекитилгендигин билдирет. $\varepsilon^2 = EI(TL^2)^{-1} \ll 1$, E – серпилгичтүүлүктүн туруктуу модулу, I - балканын туурасынан кесилишинин нейтралдуу окко карата туруктуу инерция моменти, T - узатасынан туруктуу аракет, L - балканын узундугу. ε - ийилиштин катуулугу туурасынан аракетке салыштырмалуу кичине деп кабыл алгандык менен камсыздалат.

(2.3.1) маселесинин чыгарылышы квадратура формасында жазып алсак болот, бирок так болбойт. Ошондуктан маселенин түзүмүн $\varepsilon \to 0$ учурда жазалы:

$$\omega(x,\varepsilon) = c_1(\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + c_2(\varepsilon)e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} + \omega_0(x,\varepsilon), \qquad (2.3.2)$$

Бул жерде $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c_1(\varepsilon) = c_1^0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c_2(\varepsilon) = c_2^0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \omega_0(x,\varepsilon) = \omega_0(x)$,

$\varepsilon = 0$ болгон учурда (2.3.1) туюнтмасынан алынган $\omega_0(x)$ –функциясы пределдик тендеменин чыгарылышы болот.

$$L_0\omega_0 \equiv -\frac{d_2\omega_0}{dx^2} = p(x). \qquad (2.3.3)$$

Бул чыгарылыш биринчи четтик шарттарды канааттандырат. c_1^0 жана c_2^0 –каалагандай const.

$\varepsilon \to 0$ учурда (2.3.1) маселеси каралса сингулярдуу дүүлүккөн маселе болуп эсептелинет. Терминологияда сингулярдуу сөзүнө регулярдуу эмес сөзү туура келет. Чындыгында, функция $exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ же болбосо $\left(exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right)$ функцияларын ε=0 чекитинин аймагында ε даражаларына карата катарга ажыратууга болбойт. Мындай функцияны ε боюнча сингулярдуу жана (2.3.1) маселесин сингулярдуу дүүлүккөн деп аташат. Эгер (2.3.1) маселеси үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялар классында каралса, L_ε операторунун аныкталуу областы [0,1] сегментинде төрт үзгүлтүксүз туундуга ээ жана четтик шарттарды канааттандырган функциялардан турат. $\varepsilon = 0$ болгон учурда пределдик теңдемеси алынат (2.3.2), анын чыгарылышы $\omega_0 \notin \mathcal{D}(L_\varepsilon)$ каалагандай $p(x) \in C[0,1]$ функциясы үчүн. Эгер $p(x) \in C^\infty[0,1]$ болсо деле, (2.3.2) пределдик тендемесинин чыгарылышы (1.13)- $\omega_0 \notin \mathcal{D}(L_\varepsilon)$ чыгарылышы болот. Себеби каалагандай чексиз дифференцирленүүчү $p(x)$ функциясында (2.3.3) маселесинин чыгарылышы төрт четтик шартты канаатандырбайт(2.3.1). Башкача айтканда, эгер $L_0(\varepsilon = 0)$ пределдик оператордун $\mathcal{D}(L_0)$ аныкталуу областы $\mathcal{D}(L_\varepsilon)$ областына караганда кенен болсо каралган маселе сингулярдуу дүүлүккөн болот.

(2.3.1) маселесинин чыгарылышы ε ден сингулярдуу көз каранды болгон функцияларды камтыгандыгы үчүн пределдик теңдеменин чыгарылышы $\omega_0(x)$ га $[0,1]$ сегментинде текши эмес умтулат. Чектердин аймагында гана нөлдөн айырмаланган функциялар четтик катмар тибиндеги функциялар деп аталат. (2.3.1) маселесинин чыгарылышы эки четтик катмар тибиндеги функцияны камтыйт, биринчиси сол тарабында $exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$, ал эми экинчиси оң тарабында $\left(exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right)$ [60].

Үчүнчү бөлүм

3.1 Маселенин коюлушу

Магистрдик иште төмөнкү маселе каралды. Каралуучу маселеде башкаруу функциясы төмөнкү маселе менен сүрөттөлгөн.

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv u_t - \varepsilon^2 a(x) u_{xx} - b(x,t)u - p(x,t,\varepsilon) = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \qquad (3.1)$$

четтик шарттары

$$u(x,0,\varepsilon) = 0,\ \ u_x(0,t,\varepsilon) = 0,\ \ u_x(1,t,\varepsilon) + \alpha u(1,t,\varepsilon) = 0, \qquad (3.2)$$

Мында $\alpha = const > 0$, Ω=$(0< t \ \le T) \times (0 < x < 1)$, $\varepsilon > 0 -$ кичи параметр. А шарты аткарылган деп эсептелет, эгерде $b(x,t)$, $f(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \forall x \in [0,1]$, $0 < a(x) \in C^\infty[0,1]$, $p(x,t,\varepsilon)$ башкаруу функциясы $- L_2(\overline{\Omega})$ мейкиндигине тиешелүү.

Каралып жаткан оптималдуу башкаруунун максаты $p^0(x,t,\varepsilon)$ и башкаруусун жана ага туура келген (3.1) - (3.2) маселесиндеги $u^0(t,x)$ чыгарылышын табу болуп саналат

Мында функционал

$$I = \int_0^1 [u(x,T,\varepsilon) - \Phi(\mathrm{x})]^2 dx + \beta \int_0^1 \int_0^T p^2(x,t,\varepsilon) dt\, dx, \quad \beta = const > 0$$

$p(x,t,\varepsilon) = p^0(x,t,\varepsilon)$ болгондогу $u(x,t,\varepsilon) = u^0(x,t,\varepsilon)$ дун эң кичине маанисин алат. Мында $T -$ фиксирлеген убакыт учуру ал эми $\varphi(x)$ $L_2(0,1)$ деги берилген функция.

[35] методуна ылайык (о.э.[33] карайбыз), коюлган оптималдуу башкаруу маселени (1)- (2) маселесиндеги $u(x,t,\varepsilon)$ ду табуу менен бириктирсе болот

$$p(x,t,\varepsilon) = \frac{1}{2\beta} \psi(x,t,\varepsilon),$$

Мында $\psi(x,t,\varepsilon) \in W_2^{0.1}(\overline{\Omega})$ функциясы кийинки маселеде аныкталат:

$$\partial_t \psi(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^2 \partial_x^2 \big(a(x)\psi(x,t,\varepsilon)\big) + b(x)\psi(x,t,\varepsilon) = 0,\ \ \partial_x\ (a(x)\psi)|_{x=0} = 0, \qquad (3.3)$$

$$[\partial_x\big(a(x)\psi(x,t,\varepsilon)\big)+\alpha a(x)\psi(x,t,\varepsilon)]|_{x=1}=0, \psi(x,T,\varepsilon)=-2[u(x,T,\varepsilon)-\Phi(\mathrm{x})] \quad (3.4)$$

3.2 Маселени регулярлоо

Сингулярдуу дүүлүккөн маселелерди регулярлоо [25] методуна ылайык регулярлоочу өзгөрмөлөрду киргизебиз.

$$\xi_l=\frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon}\equiv\frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon}\int_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}},\quad l=1{,}2.$$

Изделип жаткан $u(x,t,\varepsilon)$ жана $y(x,t,\varepsilon)\equiv a(x)\psi(x,t,\varepsilon)$ функциялардын ордуна кеңейтилген $\tilde{u}(x,t,\xi,\varepsilon)$, $\tilde{y}(x,t,\xi,\varepsilon)$ функцияларын киргизебиз мында

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)}\equiv u(x,t,\varepsilon),\quad \varphi(x,\varepsilon)=\tfrac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(x),\varphi_2(x)), \quad (3.5)$$

$$\tilde{y}(M,\varepsilon)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)}\equiv y(x,t,\varepsilon),\quad M=(x,t,\xi),\quad \xi=(\xi_1,\xi_2)$$

(3.6) негизинде (3.7) теңдештигинен t жана x боюнча туунду алабыз. Анда (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) ди эске алып, $\tilde{u}(x,t,\xi,\varepsilon)$ жана $\tilde{y}(x,t,\xi,\varepsilon)$ кеңейтилген функциялары үчүн төмөндөгүдөй маселе коюлат.

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon)\equiv D\tilde{u}-\varepsilon L_\xi\tilde{u}-\varepsilon^2L_x\tilde{u}-\tilde{p}(M,\varepsilon)=f(x,t),\qquad (x,t,\xi)\in Q, \quad (3.6)$$

$$\left[\partial_x\tilde{u}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)+\alpha\tilde{u}(M,\varepsilon)\right]_{x=1,\xi_2=0}=0,$$

$$\left[\partial_x\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}\tilde{u}\right]_{x=1,\xi_1=0}=0,\qquad \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=0}=0.$$

$$\tilde{K}_\varepsilon\tilde{y}(M,\varepsilon)\equiv D_1\tilde{y}(M,\varepsilon)+\varepsilon L_\xi\tilde{y}(M,\varepsilon)+\varepsilon^2L_x\tilde{y}(M,\varepsilon)=0, M\in Q, \quad (3.7)$$

$$\tilde{y}(M,\varepsilon)|_{t=T}=-2a(x)[\tilde{u}(x,T,\xi,\varepsilon)-\Phi(\mathrm{x})],$$

$$\left(\partial_x\tilde{y}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l(x)\partial_{\xi_l}\tilde{y}(M,\varepsilon)\right)_{x=0,\xi_1=0}=0,$$

$$\left(\partial_x \tilde{y}(M,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2} \varphi_l \partial_{\xi_l} \tilde{y}(M,\varepsilon) + \alpha\tilde{u}(M,\varepsilon)\right)_{x=1,\xi_2=0} = 0,$$

$M = (x,t,\xi),\quad Q = \Omega_1 \times (0 < \xi_1 < \infty) \times (0 < \xi_1 < \infty).$

Бул жерде мындай белгилөөлөрдү киригизебиз:

$$D \equiv \partial_t - D_\xi - b(x,t), D_\xi \equiv \left(\sum_{l-1}^{2}(-1)^{l-1}\partial_{\xi l}\right)^2, \qquad D_1 \equiv \partial_t - D_\xi - b(x,t),$$

$$L_\xi \equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}[2\varphi_l'(x)\partial_{x,\xi_l}^2 + \varphi_l''(x)\partial_{\xi_l}], \qquad L_x \equiv a(x)\partial_x^2.$$

Ушуну менен бирге керектүү регулярлоо шарттары аткарылат.

$\left(\tilde{K}_\varepsilon \tilde{y}(M,\varepsilon)\right)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv K_\varepsilon y(x,t,\varepsilon),$

$(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon))|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon).$

Бегилей кетчү нерсе (3.1)-(3.2) алгачкы маселелерден кеңейтилген (3.8)-(3.9) маселеге өтүүдө $p(x,t,\varepsilon)$ башкаруусу да кеңейүүгө учурайт башкача айтканда төмөнкү түргө келтирилет

$\tilde{p}(M,\varepsilon)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv p(x,t,\varepsilon) = \frac{1}{2\beta}\tilde{y}(M,\varepsilon).$

(3.8),(3.9) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө аныктайбыз

$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(M),\quad \tilde{p}(M,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i p_i(M),\quad \tilde{y}(M,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i y_i(M)$ (3.8)

(3.8)-(3.9) маселесин (3.10) го алып барып койсок, анда ε бирдей даражадагы коэффициенттерин барабарлап кийинки итераттык маселегени алабыз: $Du_0(M) = f(x,t) + p_0(M), Du_i(M) = p_i(M) + L_\xi u_{i-1}(M) + L_x u_{i-2}(M),$

$u_i(M)|_{t=0} = 0,$

$$\partial_{\xi_l} u_0(M)|_{\xi_l=0} = 0, \sum_{l=1}^{2} \varphi_l'(x)\partial_{\xi_l} u_i(M)|_{x=0,\xi_1=0} = -\, \partial_x u_{i-1}|_{x=0,\xi_1=0},$$

$$\sum_{l=1}^{2} \varphi_l'(x)\partial_{\xi l} u_i(M)|_{x=1,\xi_2=0} = -\left(\alpha u_{i-1}(M) + \partial_x u_{i-1}(M)\right)|_{x=1,\xi_2=0}, i \geq 1, \qquad l = 1,2.$$

$$D_1 y_0 = 0, D_1 y_1 = -L_\xi y_0, D_1 y_i = -L_\xi y_{i-1} - L_x y_{i-2}, \tag{3.9}$$

$$y_0|_{t=T} = -2a(x)[u_0(x,T,\xi) - \phi(x)], \qquad y_i|_{t=T} = -2a(x)u_i(x,T,\xi)$$

$$\sum_{l=1}^{2} \varphi_l'(x)\partial_{\xi_l} y_i|_{x=0,\xi_1=0} = -\, \partial_x y_{i-1}|_{x=0,\xi_1=0},$$

$$\sum_{l=1}^{2} \varphi_l'(x)\partial_{\xi_l} y_i|_{x=1,\xi_2=0} = -\,(\alpha y_{i-1} + \partial_x y_{i-1})|_{x=1,\xi_2=0}$$

3.3 Итераттык маселелерди чыгаруу

(3.11), (3.12) итерациялык маселесин класс функциясында чыгарабыз.

$$U = \left\{ \begin{matrix} u(M): u(M) = v(x,t) + \sum_{l=1}^{2} [Z_l(N_l)], \\ |Z_l(N_l)| < c \exp\left(-\dfrac{\xi_l^2}{8t}\right), \qquad v(x,t), \in C^\infty(\bar{\Omega}), N_l = (x,t,\xi_l) \end{matrix} \right\}$$

$$Y = \left\{ y(M): y = q(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \left[X_l(N_l) + \omega_l(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right], \omega_l(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \right\}$$

$i = 0,$ болгондо (3.11), (3.12) теңдемелери U жана Y тиешелүү чыгарылыштарына ээ, алар төмөнкүчө жазылат

$$u_0(M) = v_0(x,t) + \sum_{l=1}^{2} [Z_{l,0}(N_l)], \tag{3.10}$$

$$y_0(M) = q_0(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\left[X_{l,0}(N_l) + \omega_{l,0}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right],$$

(3.11) жана (3.12) теңдемелерин тең бирдей чыгарабыз, (3.12) маселеси $i = 0$ болгондо (3.13) түрдөгү чыгарылышка ээ эгерде

$$\partial_t q_0 = b(x,t)q_0(x,t), \quad \partial_t \omega_{l,0}(x,t) = b(x,t)\omega_{l,0}(x,t),$$

$$D_1 X_{l,0}(N_l) = 0,\ q_0(x,t)|_{t=T} = -2a(x)[v_0(x,T) - \phi(x)], \qquad (A_1) \qquad (3.11)$$

$$\omega_{l,0}(x,t)|_{t=T} = \omega_{l,0}^0(x), \quad X_{l,0}(N_l)|_{t=T} = -2a(x)Z_{l,0}(N_l)|_{t=T},$$

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\left[\partial_{\xi_l}X_{l,0} - \omega_{l,0}(x,t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{T-t}}exp\left(-\frac{\xi_l^2}{2\sqrt{T-t}}\right) = 0\right],$$

(3.11) маселеси $i = 0$ болгондо (3.13) түрдөгү чыгарылышка ээ эгерде $v_0(x,t)$ функциясы жана $Z_{l,0}(N_l)$- маселинин чыгарылышы: $\partial_t v_0 = b(x,t)\ v_0(x,t), +f(x,t) + a_1(x)q_0(x,t), \quad v_0|_{t=0} = 0,$

$$DZ_{l,0}(M) = a_1(x)\left[X_{l,0}(N_l) + \omega_{l,0}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right],\ a_1(x) = \frac{1}{2\beta a(x)} \qquad (3.12)$$

$$Z_{l,0}|_{t=0} = 0, \qquad \left[\varphi_1'(x)\partial_{\xi_1}Z_{l,0}(N_1) + \varphi_2'(x)\partial_{\xi_2}Z_{l,0}(N_2)\right]_{x=0,\xi_1=0,\xi_2=\frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}}$$

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}Z_{l,0}(N_l)\big|_{x=1,\xi_2=0,\xi_1=\frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}} = 0.$$

Алынган маселелерден функцияларына $v_0(x,t),\ \omega_{l,0}(x,t),\ q_0(x,t)$ карата табабыз.

$$\omega_{l,0}(x,t) = \omega_{l,0}^0(x)exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right),$$

$$q_0(x,t) = -2a(x)[v_0(x,T) - \phi(x)]exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right),$$

$$v_0(x,t) = \int_0^t exp\left(\int_\tau^t b(x,s)ds\right)[f(x,\tau) + a_1(x)\, q_0(x,\tau)]d\tau.$$

Экинчи катышты үчүнчү барабардыкка койуп

$$v_0(x,t) = \int_0^t exp\left(\int_\tau^t b(x,s)ds\right)[f(x,\tau) - 2a_1(x)a(x)(v_0(x,T) - \phi(x)]exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right)d\tau$$

Жана белгилөө жүргүзүп

$$f_0(x,t) = \int_0^t \exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right)[f(x,\tau) + 2a_1(x)a(x)\phi(x)]\, d\tau,$$

$$k(x,t) = \int_0^t \exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right)2a_1(x)a(x)d\tau = \frac{1}{\beta}\int_0^t \exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right)d\tau = = \frac{t}{\beta}\exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right)$$

кайра жазып

$$v_0(x,t) = -k(x,t)\, v_0(x,t) + f_0(x,t).$$

Барабардыктын эки жагына тең $t = T$ койуп

$$v_0(x,T) = \frac{f_0(x,T)}{1 + k(x,T)},$$

аныктайбыз, $\beta > 0$ болгондуктан $k(x,t) = \frac{T}{\beta} > 0$ болот ошондуктан $1 + k(x,T) \neq 0\ \forall x \in [0,1]$.

табылган $v_0(x,T)$ ны $v_0(x,t)$ катышына койуп

$$Z_{l,0}(N_l) = c_{l,0}(x,t)J_{2,0}^l(t,\xi_l), \qquad X_{l,0}(N_l) = d_{l,0}(x,t)J_{1,0}^l(t,\xi_l), \qquad (A_2)$$

(3.14) жана (3.15) теңдемелерине койуп $\partial_t c_{l,0} J_{2,0}^l + c_{l,0}(x,t)\partial_t J_{2,0}^l(t,\xi_l) - c_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}^2 J_{2,0}^l(t,\xi_l) -$

$$-b(x,t)c_{l,0}(x,t)J_{2,0}^l(t,\xi_l) =$$

$$= a_1(x)\left[d_{l,0}(x,t)J_{1,0}^l(t,\xi_l) + \omega_{l,0}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right],$$

$$\partial_t d_{l,0}(x,t)J_{1,0}^l(t,\xi_l) + d_{l,0}(x,t)\partial_t J_{1,0}^l(t,\xi_l) - d_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}^2 J_{1,0}^l(t,\xi_l) -$$

$$-b(x,t)d_{l,0}(x,t)J_{1,0}^l(t,\xi_l) = 0$$

Экинчи катышта койуп

$$\partial_t d_{l,0}(x,t) = b(x,t)d_{l,0}(x,t), \qquad \partial_t J_{1,0}^l(t,\xi_l) = -\partial_{\xi_l}^2 J_{1,0}^l(t,\xi_l), (A_4)\ (3.13)$$

Бул теңдемелерди чыгаруу үчүн төмөнкү шартка ээ болобуз

$$d_{l,0}(x,t)J_{1,0}^l(t,\xi_l)|_{t=T} = -2a(x)c_{l,0}(x,T)J_{2,0}^l(T,\xi_l), (3.14)$$

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\left[d_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}J_{1,0}^l(t,\xi_l) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega_{l,0}(x,t)}{\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\right]_{x=l-1,\xi_l=\frac{\varphi_l(l-1)}{\varepsilon}} = 0.$$

Биринчи катыштан аныктайбыз

$$d_{l,0}(x,t)|_{t=T} = -2a(x)c_{l,0}(x,T), \qquad J_{1,0}^l(t,\xi_l)|_{t=T} = J_{2,0}^l(T,\xi_l),$$

экинчи катыш (3.17) мындай жазабыз

$$\varphi_1'(0)d_{1,0}(0,t)\partial_{\xi_1}J_{1,0}^1(t,0) + \varphi_2'(0)d_{2,0}(0,t)\partial_{\xi_2}J_{1,0}^2\left(t,\frac{\varphi_2(0)}{4\varepsilon(T-t)}\right) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}\left[\varphi_1'(0)\omega_{1,0}(0,t) + \varphi_2'(0)\omega_{2,0}(0,t)\exp\left(-\frac{\varphi_2(0)}{4\varepsilon(T-t)}\right)\right] = 0,$$

$$\varphi_1'(1)d_{1,0}(1,t)\partial_{\xi_1}J_{1,0}^1\left(t,\frac{\varphi_2(1)}{4\varepsilon(T-t)}\right)+\varphi_2'(1)d_{2,0}(1,t)\partial_{\xi_2}J_{1,0}^2(t,\xi_2)|_{\xi_2=0}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}\left[\varphi_1'(1)\omega_{1,0}(1,t)\exp\left(-\frac{\varphi_1(1)}{4\varepsilon(T-t)}\right)+\varphi_2'(1)\omega_{2,0}(1,t)\right]=0.$$

Ылдый жакта $J_{1,0}^l(t,\xi_l)$ фунуциясы жана анын туундусу балоого ээ экендиги көрсөтүлөт

$$\partial_\xi J_{1,0}^l(t,\xi_l)=\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}O\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\right)$$

$$J_{1,0}^l(t,\xi_l)=O\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\right).$$

Ошондуктан бул баалоолордун негизинде $\exp\left(-\frac{\varphi_l(l-1)}{4\varepsilon(T-t)}\right)$ функциясынын мүчөлөрүн эске албай (3.17) ден төмөнкүнү аныктайбыз

$$\partial_{\xi_l}J_{1,0}^l(t,\xi_l)|_{\xi_l=0}=\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}},\qquad \omega_{l,0}(l-1,t)=\varphi_{l-1}'(l-1)d_{l,0}(l-1,t). \qquad (A_7)$$

(3.16) дагы биринчи теңдемеденин чыгарылышы

$$d_{l,0}(x,t)=-2a(x)c_{l,0}(x,T)exp\left(\int_T^t b(x,s)ds\right), \qquad (A_8)$$

Ал эми экинчи теңдеме (A_5), (A_7) шарттарда мындай чыгарылышка ээ болот

$$J_{1,0}^l(t,\xi_l)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{T-t}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{T-t}}J_{2,0}^2(T,s)\left[\exp\left(-\frac{(\xi_l-s)^2}{4(T-t)}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi_l+s)^2}{4(T-t)}\right)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T-t}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}\sqrt{T-t-\tau}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t-\tau)}\right)d\tau \qquad (A_9)$$

[1] балоо

$$J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)=\mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\right)\right),\qquad J_{1,0}^{l}(t,\xi_l)=\mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\right),$$

мындан, $-\frac{1}{T-t}\leq-\frac{1}{t}$, $-\frac{1}{t}\leq-\frac{1}{T}$ $\forall t\in[0,T]$ экендигин байкап мурунку баалоодон муну алабыз

$$J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)=\mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\right)\right),\qquad J_{1,0}^{l}(t,\xi_l)=\mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\right)\right),\qquad (A_9')$$

Мурунку баалоолорду эске алуу менен (A_3) деги биринчи катыштагы коэффициениттерди $J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)$, $J_{1,0}^{l}(t,\xi_l)$ жана $erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)$ барабарлап төмөнкүнү алабыз.

$$\partial_t \mathrm{c}_{l,0}(x,t)=b(x,t)\mathrm{c}_{l,0}(x,t)+a_1(x)\big[d_{l,0}(x,t)+\omega_{l,0}(x,t)\big],$$

$$\partial_t J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)=\partial_{\xi_l}^2 J_{2,0}(t,\xi_l).\qquad (A_{10})$$

Бул теңдеме үчүн баштапкы жана чектик шарттарын (A_0) дон төмөнкү түрдө аныктап алабыз

$$\mathrm{c}_{l,0}(x,t)J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)|_{t=0}=0,\Rightarrow \mathrm{c}_{l,0}(x,0)=\mathrm{c}_{l,0}^{0}(x),\quad J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)|_{t=0}=0,$$

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)\mathrm{c}_{l,0}(x,t)|_{x=l-1,\xi_l=0}=0\Rightarrow J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)|_{\xi_l=0}=0,\qquad (A_{11})$$

(A_{11}) деги экинчи барабардыкты ачык түрдө жазып:

$$\begin{cases}\varphi_1'(0)\partial_{\xi_1}J_{2,0}^{1}(t,\xi_1)|_{\xi_1=0}\mathrm{c}_{l,0}(0,t)+\varphi_2'(0)\mathrm{c}_{2,0}(0,t)\partial_{\xi_2}J_{2,0}^{2}\left(t,\dfrac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right)=0\\ \varphi_1'(1)\mathrm{c}_{1,0}(1,t)\partial_{\xi_1}J_{2,0}^{1}\left(t,\dfrac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right)+\varphi_2'(1)\mathrm{c}_{2,0}(1,t)\partial_{\xi_2}J_{2,0}^{2}(t,\xi_2)|_{\xi_l=0}=0\end{cases}\qquad (A_{11}^{*})$$

жана аныктайбыз

$$\begin{cases} \partial_{\xi_1} J^1_{2,0}(t,\xi_1)|_{\xi_1=0} = -\dfrac{\varphi_2'(0)c_{2,0}(0,t)}{\varphi_1'(0)c_{1,0}(0,t)}\partial_{\xi_2} J^2_{2,0}\left(t,\dfrac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right) \equiv \gamma^1_{2,0}(t)\partial_{\xi_2} J^2_{2,0}\left(t,\dfrac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right) \\ \partial_{\xi_2} J^2_{2,0}(t,\xi_2)|_{\xi_2=0} = -\dfrac{\varphi_1'(1)c_{1,0}(1,t)}{\varphi_2'(1)c_{2,0}(1,t)}\partial_{\xi_1} J^1_{2,0}\left(t,\dfrac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right) \equiv \gamma^2_{2,0}(t)\partial_{\xi_1} J^1_{2,0}\left(t,\dfrac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right) \end{cases} \quad (A_{11_1})$$

Теңдеменин чыгарылышы

$$\partial_t J^l_{2,0}(t,\xi_l) = \partial^2_{\xi_l} J^l_{2,0}(t,\xi_l)$$

(A_{11}) , (A_{11_1}) деги четтик шарттарды эске алуу менен мындай жазабыз

$$J^l_{2,0}(t,\xi_l) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\gamma^l_{2,0}(\tau)}{\sqrt{t-T}}\partial_{\xi_{3-l}} J^2_{2,0}\left(\tau,\frac{\varphi_{3-l}(l-1)}{\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau, l=1,2.$$

ξ_l боюнча туунду алып

$$\partial_{\xi_l} J^l_{2,0}(t,\xi_l) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\xi_l\gamma^l_{2,0}(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\partial_{\xi_{3-l}} J^2_{2,0}\left(\tau,\frac{\varphi_{3-l}(l-1)}{\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau.$$

ордуна коюп

$$\nu = \frac{\xi_l}{2\sqrt{(t-\tau)}}, \qquad d\nu = \frac{\xi_l}{4\sqrt{(t-\tau)^3}}d\tau, \qquad \tau = t-\frac{\xi_l^2}{4\nu^2}$$

кайра жазабыз

$$\partial_{\xi_l} J^l_{2,0}(t,\xi_l) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \gamma^l_{2,0}\left(t-\frac{\xi_l^2}{4\nu^2}\right)e^{-\nu^2}\partial_{\xi_l} J^l_{2,0}\left(t-\frac{\xi_l^2}{4\nu^2},\frac{\varphi_{3-l}(l-1)}{\varepsilon}\right)d\nu$$

Бул теңдеме тривиалдык кана чыгалышышка ээ

(A_9) дан $J^l_{2,0}(t,\xi_l)=0$ эске алуу менен

$$J_{1,0}^{l}(t,\xi_l)=\frac{1}{\pi}\int_0^{T-t}\frac{\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t-\tau)}\right)}{\sqrt{\tau(T-t-\tau)}}d\tau.$$

алабыз.

Лемма 1. Балоонун тууралыгы

Далилдөө. $\forall\tau\in[0,T-t]$ болгондуктан туура

$\frac{1}{T-t-\tau}\geq\frac{1}{T-t}$ или $-\frac{1}{T-t-\tau}\leq-\frac{1}{T-t'}$

Анда туура барабарсыздык

$$\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t-\tau)}\right)\leq\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right).$$

жана аны колдонуп

$$\left|J_{1,0}^{l}(t,\xi_l)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\int_0^{T-t}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau(T-t-\tau)}}$$

ордуна койууларды жүргүзүп

$$\sqrt{\tau(T-t-\tau)}=\mu\tau,\qquad(T-t-\tau)=\mu^2\tau$$

мындан

$$\tau=\frac{T-t}{1+\mu^2},d\tau=\frac{-2(T-t)\mu d\mu}{(1+\mu^2)^2},\ \ \sqrt{\tau(T-t-\tau)}=\frac{\mu(T-t)}{1+\mu^2}$$

таап, анда

$$\left|J_{1,0}^{l}(t,\xi_l)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\int_\infty^0\frac{1}{\frac{\mu(T-t)}{1+\mu^2}}\frac{-2(T-t)\mu}{(1+\mu^2)^2}d\mu=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right) \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{1+\mu^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right) arctg\, \mu \,|\,_0^{\infty} =$$

$$= \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right).$$

Лемма далилденди.

Лемма 2.

$\forall t \in [0, T]$де $\xi_l \to \infty$ да туура баалоо

$$\left|J_{2,1}^l(t, \xi_l)\right| \leq \text{ c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right)$$

Далилдөө. $\frac{1}{t-\tau} \geq \frac{1}{t}$, анда $-\frac{1}{t-\tau} \leq -\frac{1}{t}$, ошондуктан

$$\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(t-\tau)}\right) \leq \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right)$$

(A_{31}) деги акыркы алынган барабарсыздыктын негизинде бул баалоону алабыз

$$\left|J_{2,1}^l(t, \xi_l)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right) \left|\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right| \leq \text{c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right)$$

Лемма далилденди.

Лемма 3.

Мейли баалоонун ордуна лемма 2 ни алсын анда $\forall t \in [0, T]$ жана $\xi_l \to \infty$ туура

$$\left|\partial_\xi \mathrm{I}_{l,1}(t, \xi_l)\right| \equiv \left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{T-t}} J_{2,1}^l(T, s)[\exp\left(-\frac{(\xi_l - s)^2}{4(T-t)}\right) + \exp\left(-\frac{(\xi_l + s)^2}{4(T-t)}\right)] ds\right| <$$

$$< \text{c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{8t}\right)$$

Далилдөө. Лемма 2 нин негизинде интегралда $\mathrm{I}_{l,1}(t, \xi_l)$ белгилөөсүн

$$\frac{\xi_l \pm s}{4(T-t)} = \theta, \qquad d\theta = \pm\frac{ds}{2\sqrt{T-t}}, \quad \pm s = 2\theta\sqrt{(T-t)} - \xi_l.$$

Ушуну мене төмөнкүнү алабыз

$$\left|\mathrm{I}_{l,1}(t,\xi_l)\right| \le \left|\frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\pi}}\left[-\int_{\xi_l}^{-\infty}\exp\left(-\frac{1}{4T}\left(2\theta\sqrt{T-t}-\xi_l\right)^2\right)\exp(-\theta^2)d\theta\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{4T}\left(2\theta\sqrt{T-t}-\xi_l\right)^2\right)\exp(-\theta^2)d\theta\right]\right| \le \ \mathrm{c}\ \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{8t}\right)$$

Бул интегралдарды бириктирип жана [5] колдонуп

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\rho^2x^2 \pm qx)dx = \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\rho^2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\rho}$$

алабыз

$$\left|\mathrm{I}_{l,1}(t,\xi_l)\right| \le \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}+\frac{1}{T}\theta\xi_l\sqrt{T-t}-\frac{1}{T}\theta^2(T-t)-\theta^2\right)d\theta$$

$$=\frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{2T-t}{T}\theta^2+\frac{\xi_l\sqrt{T-t}}{T}\theta\right)d\theta$$

$$= \ \mathrm{c}\ \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\right)\cdot\cdot\exp\left(-\frac{\xi_l^2(T-t)}{T^2}\cdot\frac{1}{4\frac{2T-t}{T}}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{2T-t}{T}}}$$

$$= \mathrm{c}\ \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\right)\cdot\exp\left(\frac{\xi_l^2}{4T}\cdot\frac{T-t}{2T-t}\right)\cdot\sqrt{\frac{T}{2T-t}}$$

$$= c\sqrt{\frac{T}{2T-t}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\left(1-\frac{T-t}{2T-t}\right)\right) = c\sqrt{\frac{T}{2T-t}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T}\cdot\frac{T}{2T-t}\right)$$

$$= c\sqrt{\frac{T}{2T-t}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4T-t}\right)$$

Мындай

$\frac{\xi_l^2}{4(2T-t)} \geq \frac{\xi_l^2}{8T}$ же $-\frac{\xi_l^2}{4(2T-t)} \leq -\frac{\xi_l^2}{8T}$

Анда мурунку барабарсыздыкты күчтөндүрүп кайра жазабыз

$$\left|\mathrm{I}_{l,1}(t,\xi_l)\right| \leq \text{ c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{8t}\right)$$

Лемма далилденди.

<u>Лемма 4.</u> Мейли

$$\left|J_{2.1}^l(t,T)\right\} < c \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right),$$

анда балоо туура

$$\left|\partial_{\xi_l} J_{2,1}^l(t,\xi_l)\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\xi_l}{2\sqrt{(t-T)^3}} \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\right| \leq c \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right).$$

$$\forall t \in [0,1], \qquad \xi_l \to \infty.$$

Далилдөө. Өзгортүү киргизип

$$\mu = \frac{\xi_l}{2\sqrt{t-\tau}}, \quad d\mu = \frac{\xi_l}{4\sqrt{(t-\tau)^3}} d\tau$$

Анда

$$\left|\partial_{\xi_l} J_{2,1}^l(t,\xi_l)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi_l}^{\infty} \exp(-\mu^2)\, d\mu \leq \text{c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right)$$

Лемма далилденди.

Кийинки итераттык теңднмелердин оң жагында $L_\xi u_0$ жана $L_\xi y_0$ катышат, $\frac{1}{\sqrt{T-t}}$ көп мүчөлөрдү өзүнө камтышат жана алардын даражасы итераттык катардын номери менен бирге өсөт. Ошондуктан $c_{l,i}(x,t)$жана $\omega_{l,i}(x,t)$ каалагандай функцияларын тандоо менен ар бир итераттык кадамда ушундай кошулуучулардан арылабыз.

Табуу процессин карарайлы, $\omega_{l,0}(x,t)|_{t=0} = \omega_{l,0}^{0}(x)$

$$\omega_{l,0}(x,t) = \omega_{l,0}^{0}(x)B(x,t,T) +$$

$$+\int_0^t a_1(x)\left[d_{l,0}(x,\tau) + y_{l,0}(x,\tau)\right]\exp(B(x,t,0) - B(x,\tau,0)d\tau \qquad (A_{17})$$

аныктайбыз.

Бул функцияны коюп $D_{x,l}\omega_{l,0}(x,t) = 0$:

$$D_{x,l}\left[\omega_{l,0}^{0}(x) + \int_0^t a_1(x)\left[d_{l,0}(x,\tau) + y_{l,0}(x,\tau)\right]\exp\big(-B(x,\tau,0)\big)\,d\tau\right] +$$

$$+[2\varphi_l'(x)B_x'(x,t,0) + \varphi_l''(x)] \times$$

$$\times\left[\omega_{l,0}^{0}(x) + \int_0^t a_1(x)\left(d_{l,0}(x,\tau) + y_{l,0}(x,\tau)\right) exp\left(-B(x,\tau,0)\right)d\tau\right] = 0,$$

Бул жерден $\exp\big(-B(x,t,0)\big)$ ге кыскарттык , анада мурунку барабардыкты мындай жазабыз,

$D_{x,l}y_{l,0}(x,t) = -D_{x,l}d_{l,0}(x,t),$

$$D_{x,l}\omega_{l,0}^{0}(x) + \gamma_l^2(x,t)\omega_{l,0}^{0}(x) = -\gamma_l^2(x,t)a_1(x)\int_0^t\left[d_{l,0}(x,\tau) + y_{l,0}(x,\tau)\right]e^{-B(x,\tau,0)}\,d\tau,$$

$$\gamma_l^2(x,t) = 2\varphi_l'(x)B_x'(x,t,0) + \varphi_l''(x).$$

же

$$\frac{d\omega_{l,0}^{0}(x)}{dx}+\frac{1}{2\varphi_l'(x)}\Big(\varphi_l''(x)+\gamma_l^2(x,t)\Big)\omega_{l,0}^{0}(x)=$$

$$=-\frac{a_1(x)\gamma_l^2(x,t)}{2\varphi_l'(x)}\int_0^t\big[d_{l,0}(x,\tau)+y_{l,0}(x,\tau)\big]e^{-B(x,\tau,0)}\,d\tau \qquad (A_{18})$$

Бул теңдеменин чыгарылылышын табуу үчүн (A_{11}^{*}) ден $J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)=0$ экенин эске алып $\omega_{l,0}(l-1,t)$ маанисин каалагандай $c_{l,0}(l,t)=\alpha_{l,0}(t)$ сыяктуу тантап алабыз.

$$\omega_{l,0}(l,t)=\alpha_{l,0}(t)$$

Туюнтманы бул жерге койуп $\omega_{l,0}(l,t)$ из (A_{17}), анда төмөнкүнү алабыз

$$\omega_{l,0}^{0}(l-1)=-\int_0^t a_1(l-1)\big[d_{l,0}(l-1,\tau)+y_{l,0}(l-1,\tau)\big]\exp\big(-B(l-1,\tau,0)\big)\,d\tau+$$

$$+\alpha_{l,0}(t)\exp\big(-B(l-1,t,0)\big)\,(A_{19})$$

Маселенин чыгарылышы (A_{18}), (A_{19}) болот

$$\omega_{l,0}^{0}(x)=\Bigg[\omega_{l,0}^{0}(l-1)$$

$$+\int_{l-1}^{x}\gamma_l^3(s,t)(\int_0^t\Big(d_{l,0}(s,\tau)+y_{l,0}(s,\tau)\Big)exp\big(-B(x,\tau,0)\big)d\tau)\cdot$$

$$\cdot\exp(E_l(s,t))ds\Bigg]\exp\big(-E_l(s,t)\big), \qquad (A_{19}')$$

$$E_l(x,t)=\frac{1}{2}\int_{l-1}^{x}\frac{\varphi_l''(s)+\gamma_l^2(s,t)}{\varphi_l'(s)}ds,\quad \gamma_l^3(s,t)=-\frac{a_1(x)\gamma_l^2(x,t)}{2\varphi_l'(x)}$$

(A_{19}) ду (A_{19}') ге койуп алынганды (A_{17}) койобуз , алдын ала бгилөөлөрдү киргизип алып

$$M_{l,1}^{0}(x,t,\tau)=exp\big(-B(l-1,\tau,0)\big)\exp\big(-E_l(s,t)\big)\,a_1(l-1),$$

$$M_{l,2}^0(x,t) = exp\big(-B(l-1,\tau,0)\big)\exp\big(-E_l(s,t)\big),$$

$$M_{l,3}^0(x,s,t) = \gamma_l^3(s,t)\exp\big(-E_s(s,t)\big)\exp\big(-E_l(s,t)\big),$$

$$M_{l,4}^0(x,s,t,\tau) = M_{l,3}^0(x,s,t)exp\big(-B(x,\tau,0)\big),$$

жазабыз

$$\omega_{l,0}(x,t) = -\int_0^t M_{l,1}^0(x,t,\tau)\big[d_{l,0}(l-1,\tau) + y_{l,0}(l-1,\tau)\big]d\tau + \alpha_{l,0}(t)M_{l,2}^0(x,t) + \int_{l-1}^x \int_0^t M_{l,4}(x,s,t,\tau)\big[d_{l,0}(s,\tau) + y(s,\tau)\big]\,d\tau ds$$

Бул жерге (A_{16}) нын негизинде (A_8) деги $d_{l,0}(x,t)$, (A_*) дагы $\omega_{l,0}(x,t)$ мааанилерди койуп төмөнкүнү алабыз

$$\omega_{l,0}^0(x) = \omega_{l,0}^0(x)\exp\big(\mathrm{P}_l(x,t,s)\big) + \int_{l-1}^x (\mathrm{P}_l(x,t,0)\int_0^t \big[d_{l,0}(s,\tau) + \omega_{l,0}(s,\tau)\big]\,d\tau ds$$

(A_{17}) ге койуп

$$\begin{aligned}\omega_{l,0}(x,t) = {} & \alpha_{l,0}(t)M_{l,2}^0(x,t) \\ & - \int_0^t M_{l,1}^0(x,t,\tau)\big[-2a(l-1)\omega_{l,0}(l-1,T)exp\big(-B(x,\tau,T)\big) \\ & + exp\big(-B(x,\tau,T)\big)(-2a(l-1)\omega_{l,0}(l-1,T))\big]d\tau \\ & + \int_{l-1}^x \int_0^t M_{l,4}(x,s,t,\tau)\Bigg[-2a(s)\omega_{l,0}(s,\tau)exp\big(-B(x,\tau,T)\big) \\ & - 2a(l-1)\omega_{l,0}(s,T)\cdot\exp\left(-\int_{l-1}^s \gamma_{l,0}^5(s_1,\tau)\,ds_1\right) \\ & + \int_{l-1}^s \exp\left(-\int_{l-1}^s \gamma_{l,0}^5(s_2,\tau)\,ds_2\right)\gamma_{l,0}^4(s_1,\tau)\omega_{l,0}(s_1,T)ds_1\Bigg]d\tau ds,\end{aligned}$$

$$\gamma_{l,0}^4(s,t) = \frac{H_{l,0}^4(s,t)}{2\varphi_l'(s)}\exp\left(\int_{l-1}^x \gamma_{l,0}^5(s_1,t)\,ds_1\right),$$

$$\gamma_{l,0}^{5}(x,t) = \frac{\gamma_l^1(x,t)}{2\varphi_l'(x)}.$$

Интегралдоо ирээтин өзгөгтуп жанан белгилөөлөрдү киргизип:

$$M_{l,5}^0(x,t) = 4\int_0^t M_{l,1}^0(x,t,\tau)a(l-1)exp\big(-B(x,\tau,T)\big)d\tau,$$

$$M_{l,6}^0(x,s,t) = 4\int_0^t \Bigg\{ M_{l,4}^0(x,s,t,\tau)\Bigg[-2a(s)exp\big(-B(x,\tau,T)\big) \\ -2a(l-1)\exp\left(-\int_{l-1}^s \gamma_{l,0}^5(s_1,\tau)\,ds_1\right)\Bigg]\cdot \\ \cdot\int_s^x \gamma_{l,0}^4(s,\tau)\exp\left(-\int_{l-1}^s \gamma_{l,0}^5(s_2,\tau)\,ds_2\right) + M_{l,4}^0(x,s_1,t,\tau)ds_1\Bigg\}d\tau.$$

Кайра жазып

$$\omega_{l,0}(x,t) = \alpha_{l,0}(t)M_{l,2}^0(x,t) + \int_{l-1}^x M_{l,6}^0(x,s,t)\,\omega(s,T)ds + M_{l,5}^0(x,t)c_{l,0}(l-1,T).$$

Бул теңдеме $\forall t \in [0,T]$, $x \in [0,1]$ тиешелүү болуп жана анын чыгарылышын төмөнкүчө көрсөтүп

$$\omega_{l,0}(x,t) = \alpha_{l,0}(t)M_{l,2}^0(x,t) + M_{l,5}^0(x,t)c_{l,0}(l-1,T) \\ + \int_{l-1}^x R_{l,0}(x,s,t)\big[\alpha_{l,0}(t)M_{l,2}^0(s,t) + M_{l,5}^0(x,t)\omega_{l,0}(l-1,T)\big]ds, (A_{19_2})$$

Мында $R_{l,0}(x,s,t) -$ $M_{l,6}^0(x,s,t)$ ядросунун резольвентасы. (A_{19_2}) дагы $\omega_{l,0}(l-1,T)$ белгисизди табуу үчүн $t = T$ жана $x = l-1$:

$$\omega_{l,0}(l-1,T) = \alpha_{l,0}(t)M_{l,2}^0(l-1,t) + M_{l,5}^0(l-1,t)\omega_{l,0}(l-1,T)$$

мындан

$$\omega_{l,0}(l-1,T)=\frac{\alpha_{l,0}(t)}{1-M^0_{l,5}(l-1,t)}. \qquad (A_{19_3})$$

аныктайбыз, $M^0_{l,5}(l-1,t)$ үчүн төмөнкүнү жазабыз:

$$M^0_{l,5}(l-1,t)=4\int_0^T M^0_{l,1}(l-1,t,\tau)\,a(l-1)exp\big(-B(l-1,\tau,T)\big)d\tau=$$
$$=4\int_0^T a(l-1)\,a_1(l-1)\cdot$$
$$\cdot\, exp\big(-B(l-1,\tau,0)\big)\exp\big(-E_l(l-1,T)\big)\,exp\big(-B(l-1,\tau,T)\big)d\tau=$$
$$=\frac{1}{\beta}\int_0^T\exp\left(-\int_0^\tau b(l-1,s)ds-\int_T^\tau b(l-1,s)ds\right)d\tau=$$
$$=\frac{1}{\beta}\int_0^T\exp\left(-2\int_0^\tau b(l-1,s)ds)\right)d\tau\cdot\exp\left(\int_0^T b(l-1,s)ds\right)$$

β турактуусун төмөнкүчө тандайбызны

$$\beta\neq\frac{1}{\left(\int_0^T exp\left(-2\int_0^T b(l-1,s)\right)ds\right)d\tau\exp\left(\int_0^T b(l-1,s)ds\right)}.$$

Анда (A_{19_3}) мааниге ээ, ошондуктан (A_{19_3}) ди (A_{19_2}) ге койуп $c_{l,0}(x,t)$ ны андан кийин $d_{l,0}(x,t),\omega_{l,0}(x,t)$аныктайбыз.

Лемма 5. Мейли

$$|\mathrm{I}_2(T,\xi)|\leq\ \mathrm{c}\ \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right),$$

Ошондой эле баалоонун ордуна төмөкүгө ээ

$$\left|\partial_\xi\mathrm{I}_3(T,\xi)\right|\leq\frac{\mathrm{c}}{\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right),c=const.$$

Далилдөө. Туундуну алабыз

$$\partial_\xi \mathrm{I}_3(T,\xi) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}}\int_0^\infty \mathrm{I}_2(T,s)\left[\frac{\xi-s}{2(T-t)}\exp\left(-\frac{(\xi-s)^2}{4(T-t)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\xi+s}{2(T-t)}\exp\left(-\frac{(\xi+s)^2}{4(T-t)}\right)\right]ds$$

Модулга өтүп, $\mathrm{I}_2(T,\xi)$ үчүн баалоону эске алып төмөнкүнү алабыз

$$\left|\partial_\xi \mathrm{I}_3(T,\xi)\right| \le \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{T-t}}\left[\left|\int_0^\infty \frac{\xi-s}{2(T-t)}\exp\left(-\frac{\xi_i^2}{4t}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-s)^2}{4(T-t)}\right)ds\right|\right.$$
$$\left.+\left|\int_0^\infty \frac{\xi+s}{2(T-t)}\exp\left(-\frac{\xi_i^2}{4t}\right)\exp\left(-\frac{(\xi+s)^2}{4(T-t)}\right)ds\right|\right].$$

Интегралдарда өзгөрмөлөргө өзгөртүү киргизип :

$$z=\frac{(\xi\pm s)^2}{4(T-t)},\qquad dz=\pm\frac{\xi+s}{2(T-t)}ds,$$

анда

$$\left|\partial_\xi \mathrm{I}_3(T,\xi)\right| \le \frac{2\mathrm{c}}{\sqrt{T-t}}\left|\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^\infty \exp\left(-\frac{\left(\xi-2\sqrt{z(T-t)}\right)^2}{4t}\right)\exp(-z)dz\right|$$

Кашааны ачып белгилөө жүргүзүп

$$z=\nu^2,\quad dz=2\nu d\nu:$$

$$\left|\partial_\xi \mathrm{I}_3(T,\xi)\right| \le \frac{2\mathrm{c}}{\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\left|\int_{\frac{\xi}{4(T-t)}}^\infty \exp\left(-\frac{1}{T}\left((2T-t)\nu^2-\xi\nu\sqrt{T-t}\right)\right)2\nu d\nu\right| =$$

$$=\frac{2\mathrm{c}}{\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\left|\int_{\frac{\xi}{4(T-t)}}^\infty \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\left(\nu^2-\xi\nu\sqrt{T-t}\right)\right)(\,2\nu-\frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t})d\nu\right.$$
$$\left.+\frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\int_{\frac{\xi}{4(T-t)}}^\infty \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\left(\nu^2-\xi\nu\sqrt{T-t}\right)\right)d\nu\right|.$$

Биринчи интегралга белгилөө киргизип

$$\mu = \nu^2 - \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\nu, \qquad d\mu = (2\nu - \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t})d\nu,$$

Экинчи интегралды интегралдоодо пределин $(-\infty, \infty)$ чейин чоңойтсок барабардык күч алат.

$$\left|\partial_\xi \mathrm{I}_3(T,\xi)\right| \le \frac{2c}{\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\left|\int_\omega^\infty \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\mu\right)d\mu\right.$$
$$\left.+\frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\nu^2 + \frac{\xi\sqrt{T-t}}{T}\nu\right)d\nu\right|,$$

$$\omega = \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{1}{2(T-t)} - \frac{1}{2T-t}\right).$$

Биринчи интегралды эсептеп ал эми экинчи интегралды эсептөөдө (3.15) формуласын колдонуп төмөнкүнү алабыз

$$\left|\partial_\xi \mathrm{I}_3(T,\xi)\right| \le \frac{2c}{\sqrt{T-t}}\left|\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(T-t)}\right) + \frac{\xi\sqrt{\pi T}}{2T-t}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(2T-t)}\right)\right|.$$

Барабарсыздыктын тууралыгы үчүн:

$$-\frac{1}{2T-t} \le -\frac{1}{2T}, \qquad \frac{1}{T-t} \le -\frac{1}{T}, \qquad \left|\frac{\xi\sqrt{\pi T}}{2T-t}\exp\left(-\frac{\xi^2}{8(2T-t)}\right)\right| \le c_2.$$

Мурунку барабарсыздыктан керектүү барабарсыздыкты алабыз. Лемма далилденди.

Мейли

$|J_{2,1}^l(t,T)| < \text{ c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right)$,тогда $|d_\xi J_{2,1}^l(t,T)| < \text{ c } \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4t}\right)$,

Баалоо туралыгы

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left[-\frac{\xi - s}{2(T-t)} \exp\left(-\frac{(\xi - s)^2}{4(T-t)}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\xi + s}{2(T-t)} \exp\left(-\frac{(\xi_l + s)^2}{4(T-t)}\right)\right] ds$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{T-t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left[\frac{\xi - s}{2(T-t)} \exp\left(-\frac{(\xi - s)^2}{4(T-t)}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\xi + s}{2(T-t)} \exp\left(-\frac{(\xi_l + s)^2}{4(T-t)}\right)\right] ds$$

$$= \left| \begin{array}{c} \dfrac{(\xi \pm s)^2}{4(T-t)} = z,\ dz = \dfrac{\xi \pm s}{2(T-t)} \cdot (\pm ds) \\ \xi \pm s = 2\sqrt{z(T-t)} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{T-t}}\left[-\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^\infty \exp\left(-\frac{\left(\xi - 2\sqrt{z(T-t)}\right)^2}{4T}\right) e^{-z} dz\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^\infty \exp\left(-\frac{\left(\xi - 2\sqrt{z(T-t)}\right)^2}{4T}\right) e^{-z} dz\right] \qquad (A_\xi)$$

интегралды баалар

$$I_1 = \int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^{\infty} \exp\left(-z - \frac{\xi^2}{4T} + \frac{1}{T}\xi\sqrt{z(T-t)} - \frac{1}{T}z(T-t)\right)dz$$

$$= \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2T-t)}{T}z + \frac{1}{T}\xi\sqrt{z(T-t)}\right)dz$$

$$= \begin{vmatrix} z = \nu^2 \\ dz = 2\nu d\nu \end{vmatrix}$$

$$= \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{T}\left((2\mathrm{T}-\mathrm{t})\nu^2 - \xi\nu\sqrt{T-t}\right)\right) 2\nu d\nu$$

$$= \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\left\{\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\left(\nu^2 - \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\nu\right)\right)\cdot\left(2\nu\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\right)d\nu + \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\nu^2 + \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\nu\right)d\nu\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} \nu^2 - \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\nu = \mu \\ d\mu = \left(2\nu - \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\right)d\nu \end{vmatrix} = \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\int_{\frac{\xi^2}{4(T-t)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\nu^2 + \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\nu\right)d\nu$$

$$\leq$$

$$\leq \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2T-t}{T}\nu^2 + \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t}\nu\right) d\nu$$

$$= \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \exp\left(-\frac{\xi^2(T-t)}{T^2} : 4\frac{2T-t}{T}\right) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{2T-t}{T}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi T}{2T-t}} \cdot \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \exp\left(-\frac{\xi^2(T-t)}{T^2} \cdot 4\frac{T}{4(2T-t)}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi T}{2T-t}} \cdot \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t} + \frac{\xi^2(T-t)}{4T(2T-t)}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi T}{2T-t}} \cdot \frac{\xi\sqrt{T-t}}{2T-t} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t} + \frac{\xi^2(2T-t-T)}{4T(2T-t)}\right) = \alpha \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi T}{2T-t}} \sqrt{T-t} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{8(2T-t)}\right) \cdot \frac{\xi}{\sqrt{8(2T-t)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{8(2T-t)}\right)$$

$$\leq\leq \frac{\sqrt{8\pi T(T-t)}}{2T-t} \exp\left(-\frac{\xi^2}{8(2T-t)}\right)$$

Лемма 6. Балоонун тууралыгы

$$\left|\partial_\xi I_1(t,\xi)\right| \leq \exp\left(-\frac{\xi^2}{8(T-t)}\right)$$

Далилдөө. Туундуну табабыз

$$\partial_\xi I_1(t,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T-t} \frac{\xi}{2(T-t-\tau)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(T-t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{T-t-\tau}\sqrt{T-\tau}}$$

Мындан төмөнкүнү алып

$$\partial_\xi I_1(t,\xi) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{T-\theta}} \int_0^{T-t} \frac{\xi}{2(T-t-\tau)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(T-t-\tau)}\right) d\tau, \qquad 0 \leq \theta < T-t$$

Өзгөрмөлөргө өзгөртүү киргизип

$$\mu = \frac{\xi}{2\sqrt{T-t-\tau}}, d\mu = \frac{\xi d\tau}{4\sqrt{(T-t-\tau)^3}}$$

кайра жазып

$$\partial_\xi I_1(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{T-\theta}} \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{T-t}}}^{\infty} \exp(-\mu^2)\, d\mu \le c \exp\left(-\frac{\xi^2}{8(T-t)}\right)$$

Мындан лемма 3 тү кайталап тиешелүү баалоону алабыз. Лемма далилденди.

$L_\xi u_0$, $L_\xi y_0$ го (3.14) төгү $u_0(M)$ жана $y_0(M)$ функцияларынын маанилери койобуз . (A_2) ни жана $J^l_{2,0}(t,\xi_l) = 0$ экендигин эске алып $L_\xi u_0$=0, $L_\xi y_0 = 0$:

$$L_\xi y_0 \equiv a(x) \sum_{l=1}^{2} \{ \left[2\varphi_l'(x)\partial_x d_{l,0}(x,t) + \varphi_l''(x) d_{l,0}(x,t)\right] \partial_{\xi_l} J^l_{1,0}(t,\xi_l) +$$

$$+\left[2\varphi_l'(x)\partial_x y_{l,0}(x,t) + \varphi_l''(x) y_{l,0}(x,t)\right] \partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right)\}$$

$\xi_l \to \infty$ болгодо баалооо тура болгондуктан

$$\partial_{\xi_l} J^l_{1,0}(t,\xi_l) = O\left(\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}},$$

$$\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}\right) \qquad (A_{13_1})$$

Каалагандай $y_{l,0}(x,t) l = 1{,}2$ барабардыкта орун алгандай кылып тандаса болот

$$2\varphi_l'(x)\partial_x y_{l,0}(x,t) + \varphi_l''(x) y_{l,0}(x,t) = -D_{x,l} d_{l,0}(x,t), \qquad (A_{13})$$

$$D_x \equiv 2\varphi_l'(x)\partial_x + \varphi_l''(x), \;\; l = 1{,}2.$$

(A_{13}) кө (A_*) дагы $y_{l,0}(x,t)$ туюнтмасын коюуп муну алабыз

$$D_{x,l}\left[y_{l,0}^{0}(x)\left(-B(x,t,T)\right)\right]=-D_{x,l}d_{l,0}(x,t) \qquad (A_{14})$$

эми туюнтманы (A_8) теңдемесиндеги (A_{14}) дөгү $d_{l,0}(x,t)$ га койобуз

$$D_{x,l}\left[y_{l,0}^{0}(x)\exp\left(-B(x,t,T)\right)\right]=2D_{x,l}\left[a(x)\omega_{l,0}(x,T)\exp\left(-B(x,t,T)\right)\right]. \qquad (A_{**})$$

анда бул функцияны алабыз $J_{2,0}^{l}(t,\xi_l)=0$, $\omega_{l,0}(x,t)$ болсо мындай тандайбыз $\omega_{l,0}(x,t)=\omega_{l,0}^{0}(const)$

$D_{x,l}$ операторун ачып жиберип, $\exp\left(-B(x,t,T)\right)$ га кыскартып жиберип төмөнкүнү алабыз

$D_{x,l}y_{l,0}^{0}(x)-[\varphi_l''(x)-2\varphi_l'(x)B_x'(x,t,T)]y_{l,0}^{0}(x)=2\left[D_{x,l}a(x)-2\varphi_l'(x)a(x)B_x'(x,t,T)+\varphi_l''(x)a(x)\right]\omega_{l,0}(x,T)$,т.к. $D_{x,l}\omega_{l,0}(x,T)=0$

же белгилөө жүргүзүп

$$H_{l,0}^{0}(x,t)\equiv 2\left[D_{x,l}a(x)-2\varphi_l'(x)a(x)B_x'(x,t,T)+\varphi_l''(x)a(x)\right],$$

$$\gamma_{l,0}^{1}(x,t)\equiv\varphi_l''(x)-2\varphi_l'(x)B_x'(x,t,T)(A_{3*})$$

кайра жазып

$$2\varphi_l'(x)\frac{dy_{l,0}^{0}(x)}{dx}+\gamma_{l,0}^{1}(x,t)y_{l,0}^{0}(x)=H_{l,0}^{0}(x,t)\omega_{l,0}(x,T)$$

Алынган теңдемени баштапкы шарттарда (A_7) ден аныктайбыз

$$y_{l,0}^{0}(l-1)=-2a(l-1)\omega_{l,0}(x,T)$$

чыгарылышка ээ

$$y_{l,0}^0(x) = \left[-2a(l-1)\omega_{l,0}(x,T) + \int_{l-1}^{0} \frac{H_{l,0}^0(s,t)\omega_{l,0}(s,T)\exp\left(\int_{l-1}^{s}\frac{\gamma_l^1(s_1,t)}{\varphi_l'(s_1)}ds_1\right)}{2\varphi_l'(s)}ds\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\int_{l-1}^{x}\frac{\gamma_l^1(s_1,t)}{\varphi_l'(s_1)}ds_1\right). \qquad (A_{16})$$

Кийинки (12) жана (13) итераттык теңдемеге өтөлү качан $i = 1$ богон учурда. $y_{l,0}(x,t)$ функциясы үчүн $J_{2,0}^l(t,\xi_l) = 0$, $L_\xi U_0 = 0$ и $L_\xi y_0 = 0$ орун алды ошондуктан $u_1(M)$ жана $y_1(M)$ төмөнкү чыгарылыгка ээ болобуз

$$Du_1 = \mathrm{P}_1(M), D_1 y_1 = 0,$$

Алар U жана Y тиешелүү мейкиндигинде чыгарылат. Чыгарылышын төмөнкүчө аныктайбыз.

$$u_1(M) = v_1(x,t) + \sum_{l=1}^{2} Z_{l,1}(N_l),$$

$$Y_1(M) = q_1(x,t) + \sum_{l-1}^{2}[X_{l,1}(N_l) + y_{l,1}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)]. \qquad (A_{22})$$

Функциянын түзүүчүлөрү үчүн төмөнкү теңдемени алабыз

$$\partial_t v_1(x,t) = b(x,t)v_1(x,t) - a_1(x)q_1(x),$$

$$DZ_{l,1}(N_l) = a_1(x)\left[X_{l,1}(N_l) + \omega_{l,1}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right] \qquad (A_{22})$$

$$\partial_t q_1(x,t) = -b(x,t)q_1(x,t), \qquad \partial_t \omega_{l,1}(x,t) = -b(x,t)\omega_{l,1}(x,t),$$

$$D_1 X_{l,1}(N_l) = 0.$$

Бул теңдеменин баштапкы шарттары мындайча аныкталат:

$$v_1(x,t)|_{t=0} = 0, \qquad Z_{l,1}(N_l)|_{t=0} = 0, \qquad q_1(x,t)|_{t=T} = -2a(x)v_1(x,T),$$

$$X_{l,1}(N_l)|_{t=T} = -2a(x)\cdot Z_{l,1}(N_l)|_{t=T},$$

$$y_{l,1}(x,t)|_{t=T} = y_{l,1}^0(x).$$

Чектик шарттарын аныктоо үчүн (A_{22}) ни (3.12) жана (3.13) түн чектик шартына койобуз:

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}Z_{l,1}(N_l)\Big|_{x=0,\xi_l=\frac{\varphi_l(0)}{\varepsilon}} = -\left[\partial_x v_0(0,t) + \sum_{l=1}^{2}\partial_x\, c_{l,0}(x,t)|_{x=0}\, J_{2,0}^l(t,\xi_l)\Big|_{\xi_l=\frac{\varphi_l(0)}{\varepsilon}}\right],$$

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}Z_{l,1}(N_l)\Big|_{x=1,\xi_l=\frac{\varphi_l(1)}{\varepsilon}} =$$

$$-\Bigg[\alpha v_0(1,t) + \partial_x v_0(x,t)|_{x=1}$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\left(\alpha c_{l,0}(x,t)\, J_{2,0}^l(t,\xi_l) + \partial_x c_{l,0}(x,t)\, J_{2,0}^l(t,\xi_l)\right)_{x=1,\xi_l=\frac{\varphi_l(1)}{\varepsilon}}\Bigg],$$

$$\sum_{l=1}^{2}\varphi_l'(x)\partial_{\xi_l}y_{l,1}(N_l)\Big|_{x=0,\xi_l=\frac{\varphi_l(0)}{\varepsilon}} =$$

$$= -\left[\partial_x q_0(0,t) + \sum_{l=1}^{2}\left(\partial_x d_{l,0}(x,t)\, J_{l,0}^l(t,\xi_l) + \partial_x y_{l,0}(x,t)\cdot erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right)_{x=0,\xi_l=\frac{\varphi_l(0)}{\varepsilon}}\right]$$

$$\sum_{l=1}^{2} \varphi_l'(x)\partial_{\xi_l} y_{l,1}(N_l)\Big|_{x=1,\xi_l=\frac{\varphi_l(1)}{\varepsilon}} =$$

$$= -\Bigg\{ \alpha q_0(1,t) + \partial_x q_0(1,t)$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \Big[\Big(\alpha d_{l,0}(x,t) + \partial_x d_{l,0}(1,t) \Big) J_{1,0}^{l}(t,\xi_l) + \Big(\alpha y_{l,0}(1,t) + \partial_x y_{l,0}(1,t) \Big) \cdot$$

$$\cdot \, erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\Big]_{\xi_l=\frac{\varphi_l(1)}{\varepsilon}} \Bigg\}$$

Бул барабардыктардан $J_{2,0}^{l}(t,\xi_l) = 0$ эске алып, камтылган чондуктун $O\left(\exp\left(-\frac{\varphi_{2-l}^2}{\varepsilon^2(T-t)}\right)\right)$ тартиптеги мүчөлөрүн эске албай төмөнкүнү аныктайбыз

$$\varphi_1^1(0)\partial_{\xi_1} Z_{1,1}(N_l)|_{\xi_1=0} = -[\partial_x v_0(x,t)] \equiv Q_{1,1}(t)$$

$$\varphi_2^1(1)\partial_{\xi_2} Z_{2,1}(N_2)|_{\xi_2=0} = -[\alpha v_0(x,t) + \partial_x v_0(x,t)] \equiv Q_{1,1}(t) \qquad (A_{25})$$

$$\varphi_1^1(0)[\partial_{\xi_1} X_{1,1}(N_l) + y_{1,1}(0,t)\partial_{\xi_1} erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)]_{\xi_1=0} =$$

$$= -[\partial_x q_0(0,t) + \partial_x d_{1,0}(0,t) + \partial_x y_{1,0}(0,t)] \equiv Q_{1,2}(t)$$

$$\varphi_2^1(1)[\partial_{\xi_2} X_{2,1}(N_2) + y_{1,2}(0,t)\partial_{\xi_2} erfc\left(\frac{\xi_2}{2\sqrt{T-t}}\right)]_{\xi_2=0}$$

$$= -[\alpha q_0(0,t) + \partial_x q_0(1,t) + \alpha d_{2,0}(0,t) + \partial_x d_{2,0}(0,t) + \alpha y_{2,0}(0,t)$$

$$+ \partial_x y_{2,0}(0,t)] \equiv Q_{2,2}(t)$$

Бул жерден да функцияларды эске албай

$$\partial_{\xi_1} Z_{2,1}\left(t,\frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right), \partial_{\xi_2} Z_{1,1}\left(t,\frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right), \partial_{\xi_1} X_{2,1}\left(t,\frac{\varphi_2(1)}{\varepsilon}\right), \partial_{\xi_2} X_{1,1}\left(t,\frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right).$$

$$Z_{l,1} = c_{l,0}(x,t)\, J_{l,1}^{2}(t,\xi), \;\; X_{l,1} = d_{l,0}(x,t)\, J_{l,1}^{1}(t,\xi)$$

$$c_{1,1}(x,t)\varphi_1'(x)\partial_{\xi_1}J_{1,1}^2(t,\xi_1)|_{x=0,\xi_1=0} - \varphi_2'(x)c_{2,1}(x,t)|_{x=0}\partial_{\xi_2}J_{2,1}^2(t,\xi_2)|_{\xi_2=\frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}}$$

$$= -[\partial_x v_0(0)],\ J_{l,0}^2(t,\xi) = 0$$

$$\varphi_1'(x)c_{1,1}(x,t)|_{x=1}\partial_{\xi_1}J_{1,1}^2(t,\xi_1)|_{\xi_1=\frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}} + \varphi_2'(x)c_{2,1}(x,t)|_{x=1}\partial_{\xi_2}J_{2,1}^2(t,\xi_2)|_{\xi_2=0} =$$

$$= -[\alpha v_0(1,t) + \partial_x v_0(1,t)]$$

$$\varphi_1'(x)d_{1,1}(x,t)|_{x=0}\partial_{\xi_1}J_{1,1}^1(t,\xi_1)|_{\xi_1=0} + \varphi_2'(x)d_{2,1}(x,t)|_{x=0}\partial_{\xi_2}J_{2,1}^1(t,\xi_2)|_{\xi_2=\frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}} -$$

$$-\varphi_1'(x)y_{1,1}(x,t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{T-t}}e^{-\frac{\xi_l^2}{4(T-t)}}|_{x=0,\xi_1=0} - \varphi_2'(x)y_{2,1}(x,t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{T-t}}e^{-\frac{\varphi_{2(0)}^2}{\varepsilon^2 4(T-t)}} = [\partial_x q_0(0,t) +$$

$$+\partial_x d_{1,0}(0,t)J_{1,0}^1(t,\xi_1)|_{\xi_1=0} + \partial_x y_{1,0}(0,t) + \partial_x d_{2,0}\cdot J_{2,0}^1(t,\xi_2)|_{\xi_2=\frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}} +$$

$$+\partial_x y_{2,0}(0,t)erfc\left(\frac{\varphi_2(0)}{2\varepsilon\sqrt{T-t}}\right)]$$

$$\varphi_1'(x)d_{1,1}(x,t)|_{x=1}\partial_{\xi_1}J_{1,1}^2(t,\xi_1)|_{\xi_1=\frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}} + \varphi_2'(x)d_{2,1}(x,t)|_{x=0}\partial_{\xi_2}J_{2,1}^1(t,\xi_2)|_{\xi_2=0} -$$

$$-\varphi_2'(x)y_{1,1}(x,t)\cdot\frac{1}{\sqrt{T-t}}e^{-\frac{\varphi_1^2(1)}{4\varepsilon^2(T-t)}} - \varphi_2'(x)y_{2,1}(1,t)\frac{1}{\sqrt{T-t}} =$$

$$= -\Big[\alpha q_0(1,t) + \partial_x q_0(1,t) + \partial_x d_{1,0}(1,t) + \alpha d_{1,0}(1,t)\cdot J_{1,0}^1(t,\xi_1)|_{\xi_1=\frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}}$$

$$+ \partial_x d_{2,0}(x,t)|_{x=0} + \alpha d_{2,0}(1,t)\cdot J_{2,0}^1(t,\xi_2)|_{\xi_2=0} + \left(\alpha y_{1,0}(1,t) + \partial_x y_{1,0}(1,t)\right)$$

$$\cdot erfc\left(\frac{\varphi_1(1)}{2\varepsilon\sqrt{T-t}}\right) + \partial_x y_{2,0}(1,t)$$

$$+ \alpha\omega_{2,0}(1,t)\Big] \qquad (A_A)$$

Кийинчээрек көрүнөт, $J_{l,1}^2(t,\xi_l)$ функциясы лемма 2 деги $I_2(t,\xi)$ интеграл менен дал келет, лемма 3 түн негизинде төмөнкү баалоого ээ болобуз

$$\left|\partial_{\xi_l}J_{l,1}^2(t,\xi_2)\right| < cexp\left(\frac{\xi_l^2}{4t}\right).$$

$J_{l,1}^{1}(t,\xi_l)$ функциясы лемма 1,4төн $I_1(t,\xi)$, $I_3(t,\xi)$ дин суммасы катары көрсөтүлөт, лемма 5 тин негизинде балоо туура

$$\left|\partial_{\xi_l} J_{l,1}^{1}(t,\xi)\right| < \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{T-t}} \exp\left(-c_1 \frac{\xi_l^2}{T}\right),$$

Бул баалоолрдун негизинде кошулуучуларды эске албаса болот

$$\partial_{\xi_1} J_{2,1}^{2}\left(t, \frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right), \qquad \partial_{\xi_2} J_{1,1}^{2}\left(t, \frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right), \partial_{\xi_1} J_{2,1}^{1}\left(t, \frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right) \partial_{\xi_2} J_{1,1}^{1}\left(t, \frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right)$$

Мындан тышкары лемма 1 жана лемма 4 түн негизинде бул баалоорго ээ болобуз

$$J_{1,0}^{1}\left(t, \frac{\varphi_1(1)}{\varepsilon}\right) = \mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{\varphi_1^2(1)}{4\varepsilon^2 T}\right)\right)$$

$$J_{2,0}^{1}\left(t, \frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon}\right) = \mathrm{O}\left(\exp\left(-\frac{\varphi_2^2(0)}{4\varepsilon^2 T}\right)\right)$$

Ошондуктан мындай кошулуучуларды эске албай, (A_A) дан муну аныктайбыз

$$\omega_{1,1}(x,t)|_{x=0} = -\frac{\partial_x v_0(0,1)}{\varphi_1'(0)} \equiv Q_{1,1}^{2}(t) \partial_{\xi_1} J_{1,1}^{2}(t,\xi_1)|_{\xi_1=0} = 1,$$

$$\omega_{2,1}(x,t)|_{x=1} = -\frac{1}{\varphi_2'(1)}\left[\partial_x v_0(1,t) + \alpha v_0(1,t)\right]_{\equiv Q_{2,1}^{2}}, \partial_{\xi_2} J_{2,1}^{2}(t,\xi_2)|_{\xi_2=0} = 1,$$

$$\begin{aligned} y_{1,1}(x,t) + d_{1,1}(x,t)|_{x=0} \\ &= -\frac{\left(\sqrt{\pi(T-t)}\right)^{-1}}{\varphi_1'(0)}\left[\partial_x q_0(0,t) + \partial_x d_{1,0}(0,t) J_{1,0}^{1}(t,\xi_1)|_{\xi_1=0}\right. \\ &\quad \left. + \partial_x \omega_{1,0}(0,t)\right]_{\equiv Q_{1,1}^{1}}, \qquad \partial_{\xi_1} J_{1,1}^{1}|_{\xi_1=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}} \end{aligned}$$

$$y_{21}(x,t)+d_{2,1}(x,t)|_{x=1}$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{\pi(T-t)}\right)^{-1}}{\varphi_2'(0)}[\alpha q_0(1,t)+\partial_x q_0(1,t)$$

$$+\left(\partial_x d_{2,0}(1,t)+\alpha d_{2,0}(1,t)\right)J_{2,0}^1|_{\xi_2=0}+\partial_x y_{1,0}(1,t)$$

$$+\alpha y_{1,0}(1,t)]_{\equiv Q_{2,1}^1(t)}, \partial_{\xi_1} J_{2,1}^1(t,\xi_2)|_{\xi_2=0}=\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}$$

$$\partial_t J_{l,1}^1(t,\xi_l)=d_{\xi_l}^2 J_{l,1}^1(t,\xi_l)\partial_{\xi_l} J_{l,1}^1|_{\xi_l=0}=\frac{1}{\sqrt{T-t}}, J_{l,1}^1(t,\xi_l)|_{t=T}=J_{l,1}^2(T,\xi_l)$$

$$t=T-t$$

$$\partial_t J_{l,1}^1(T-t,\xi_l)=d_{\xi_l}^2 J_{l,1}^1(T-t,\xi_l); d_{\xi_l} J_{l,1}^1(T-t,\xi_l)|_{\xi_l=0}=\frac{1}{\sqrt{T-t}}, J_{l,1}^1(\cdot)|_{t=0}=J_{l,1}^2(T,\xi_l)$$

$$\bar{J}_{l,1}^1(t,\xi_l)=\int_0^\infty J_{l,1}^2(T,s)\frac{1}{2\sqrt{\pi T}}\left[\exp\left(-\frac{(\xi_l-s)^2}{4t}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi_l+s)^2}{4t}\right)\right]ds$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-T}}\cdot\frac{1}{\sqrt{T-\tau}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau$$

$$\left(\bar{J}_{l,1}^1(t,\xi_l)=J_{l,1}^1(T-t,\xi_l)\right)$$

Көрүп тургандай төмөндө бул функциялар $O\left(\exp\left(-\frac{\varphi_l^2(2-l)}{\varepsilon^2(T-t)}\right)\right)$тартипке ээ

(A_{23}) теңдемеси $v_l(x,t), q_l(x,t)$жана $y_{l,1}(x,t)$ га салыштырмалуу (A_{24})төгү тиешелүү шарттарга ылайык төмөнкү чыгарылышка ээ

$$v_1(x,t)=a_1(x)\int_0^t \exp\big(B(x,t,s)\big)\,q_1(x,s)ds,$$

$$q_1(x,s)=-2a(x)v_l(x,T)\exp\big(-B(x,t,T)\big),$$

$$y_{l,1}(x,t)=y_{l,1}^0(x)\exp\big(-B(x,t,T)\big),\qquad B(x,t,s)=\int_s^t b(x,\tau)d\tau.$$

Экинчи барабардыкты биринчи барабардыкка койобуз

$$v_1(x,t) = a_1(x)\int_0^t \exp\big(B(x,t,s)\big)\big(-2a(x)v_l(x,T)\exp\big(-B(x,t,T)\big)\big)ds$$

мындай аныктайбыз

$$v_1(x,t) = 0,$$

экенин. Анда $v_1(x,t) = 0, q_1(x,s) = 0$.

$Z_{l,1}(N_l) = \omega_{l,1}(x,t)J_{2,1}^1(t,\xi_l),\ \ X_{l,1}(N_l) = d_{l,1}(x,t)J_{1,1}^l(t,\xi_l), (A_{10_1})$ функциялары (A_{23}) түн негизинде жана ошондой эле (A_4), (A_{10}) ду алуу сыяктуу төмөнкүнү алабыз

$$\partial_t d_{l,1}(x,t) = -b(x,t)d_{l,1}(x,t),$$

$$\partial_t J_{1,1}^l(t,\xi_l) = \partial_{\xi_l}^2 J_{1,1}^l(t,\xi_l),$$

$$\partial_t \omega_{l,1}(x,t) = b(x,t)\omega_{l,1}(x,t) + a_1(x)\big[d_{l,1}(x,t) + y_{l,1}(x,t)\big],$$

$$\partial_t J_{2,1}^l(t,\xi_l) = \partial_{\xi_l}^2 J_{2,1}^l(t,\xi_l)$$

Бул теңдемелер үчүн баштапкы жана чектик шарттарды (A_{24}) жана (A_{25}) ден аныктайбыз

$$\omega_{l,1}(x,0) = \omega_{l,1}^0(x), \quad J_{2,1}^l(t,\xi_l) = 0,$$

$$J_{1,1}^l(t,\xi_l)|_{t=T} = J_{2,1}^l(t,\xi_l), \qquad d_{l,1}(x,t)|_{t=T} = -2a(x)\omega_{l,1}(x,t) \qquad (A_{22})$$

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_1'(0)\omega_{1,1}(0,t) = Q_{1,1}(t), \quad \partial_{\xi_1} J_{2,1}^1(t,\xi_1)|_{\xi_1=0} \\ 2\varphi_2'(1)\omega_{2,1}(1,t) = Q_{2,1}(t), \quad \partial_{\xi_2} J_{2,1}^2(t,\xi_2)|_{2=0} \end{aligned}\right\} \qquad (A_{28})$$

$$\varphi_1'(0)[d_{1,1}(0,t)\partial_{\xi_1}J_{2,1}^1(t,\xi_1)|_{\xi_1=0} + y_{1,1}(0,t)\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}] = Q_{1,2}(t),$$

$$\varphi_2'(1)[d_{2,1}(1,t)\partial_{\xi_2}J_{1,1}^2(t,\xi_2)|_{\xi_2=0} + y_{2,1}(1,t)\frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}] = Q_{2,2}(t),$$

Акыркы эки барабардыктан тандап

$$\partial_{\xi_l}J_{1,1}^l(t,\xi_l)|_{\xi_l=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}, \qquad (A_{29})$$

$$y_{l,1}(l-1,t) = \frac{\sqrt{\pi(T-t)}Q_{l,2}(t)}{\varphi_l'(l-1)} - d_{l,1}(l-1,t)$$

Бул маселе

$$\partial_t J_{1,1}^2(t,\xi_l) = \partial_{\xi_l}^2 J_{1,1}^l(t,\xi_l),\ \ J_{1,1}^l(t,\xi_l)|_{t=T} = J_{2,1}^l(t,\xi).$$

$$\partial_{\xi_l}J_{1,1}^l(t,\xi_l)_{\xi_l=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}$$

төмөнку чыгарылышка ээ:

$$\begin{aligned} J_{1,1}^l(t,\xi_l) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{T-t}}J_{1,1}^l(T,s)\left[\exp\left(-\frac{(\xi_l-s)^2}{4(T-t)}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi_l-s)^2}{4(T-t)}\right)\right]ds \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{T-t}\frac{1}{\sqrt{\tau(T-t-\tau)}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t-\tau)}\right)d\tau\,,\tau \\ &= (T-t) \qquad (A_{30}) \end{aligned}$$

$J_{2,1}^l(t,\xi_l)$ функциясы үчүн муну алабыз

$$J_{2,1}^l(t,\xi_l) = -\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t-\tau)}\right)d\tau \qquad (A_{31})$$

(A_{31}) ден $t = T$ деп аны(A_{30}) га койуп төмөнкүнү алабыз

$$J_{1,1}^{l}(t,\xi_l) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{T-t}}\int_0^{T}\frac{1}{\sqrt{\pi(T-\tau)}}\exp\left(-\frac{s^2}{4(T-\tau)}\right)d\tau\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(-\frac{(\xi_l-s)^2}{4(T-t)}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi_l-s)^2}{4(T-t)}\right)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T-t}\frac{1}{\sqrt{(T-t)(T-t-\tau)}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(T-t-\tau)}\right)d\tau \qquad (A_{32})$$

(A_{26}), (A_{27}), (A_{28}), (A_{29}) дан аныктайбыз

$$d_{l,1}(x,t) = -2a(x)c_{l,1}(x,T)\exp\big(-B(x,t,T)\big)\,(A_{33})$$

$$c_{l,1}(x,T) = \exp\big(B(x,t,0)\big)\Big[c_{l,1}^{0}(x)$$
$$+\int_0^t a_1(x)\left(d_{l,1}(x,s)+\omega_{l,1}(x,s)\right)\exp\big(-B(x,t,T)\big)\Big],$$

Бул функцияларды ордуна койуп жана $y_{l,1}(x,s)$ функциясын $A_{28})$,(A_{29}) дагы шартка койуп :

$$\exp\big(B(l-1,t,0)\big)\Big[c_{l,1}^{0}(l-1)$$
$$+\int_0^t a_1(l-1)\left(d_{l,1}(l-1,s)+y_{l,1}(l-1,s)\right)\exp\big(-B(l-1,t,0)\big)\,ds\Big]=$$
$$=\frac{Q_{l,1}(t)}{2\varphi_l'(l-1)},$$

$$\omega_{l,1}^{0}(l-1)c_{l,1}^{0}(l-1)=\frac{\sqrt{\pi(T-t)}Q_{l,2}(t)}{\varphi_l'(l-1)}-d_{l,1}(l-1,t)$$

Мындан аныктайбыз

$$c_{l,1}^{0}(l-1)=\frac{Q_{l,1}(t)}{2\varphi_l'(l-1)}\exp\bigl(-B(l-1,t,0)\bigr)$$
$$-\int_0^t a_1(l-1)\left(d_{l,1}(l-1,t)+y_{l,1}(l-1,s)\right)\exp\bigl(-B(l-1,t,0)\bigr)\,ds,$$

$$\omega_{l,1}^{0}(l-1)=\exp\bigl(-B(l-1,t,0)\bigr)\left[\frac{\sqrt{\pi(T-t)}Q_{l,2}(t)}{\varphi_l'(l-1)}-d_{l,1}(l-1,t)\right]$$
$$=\exp\bigl(-B(l-1,t,0)\bigr)\left[\frac{\sqrt{\pi(T-t)}Q_{l,2}(t)}{\varphi_l'(l-1)}\right.$$
$$\left.+\,2a_1(l-1)c_{l,1}(l-1,T)\exp\bigl(-B(l-1,t,T)\bigr)\right]$$

Функциялардын маанисин $\left(A_{10_1}\right)$ ду эске алуу менен (A_{22}) деги $U_1(M)$ жана $y_1(M)$ ге койобуз

$$L_\xi u_1(M)=a(x)\sum_{l=1}^{2}D_{x,l}\,\omega_{l,1}(x,t)\partial_{\xi_l}J_{2,1}^{l}(t,\xi_l)=0,$$

$$L_\xi y_1(M)=a(x)\sum_{l=1}^{2}\left[D_{x,l}d_{l,1}(x,t)\partial_{\xi_l}J_{1,1}^{l}(t,\xi_l)+D_{x,l}d_{l,1}(x,t)\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right)\right]$$
$$=0,$$

Бул шарттар (3.12) жана (3.13) теңдемелеринин чечилишин $i=2$, U жана Y тиешелүү класстарында камсыз кылат. Жогоруда айтылган функциялар (t,ξ_l) жана $erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)$ $\xi_l\to\infty$ болгондо бирдей баалоого ээ болушат, ошондуктан мурунку барабардыктардан муну алсак болот

$$D_{x,l}c_{l,1}(x,t)=0,\qquad D_{x,l}\omega_{l,1}(x,t)=-D_{x,l}d_{l,1}(x,t)$$

Бул барабардыктарды $\omega_{l,1}(x,t)$, $c_{l,1}(x,t)$,$d_{l,1}(x,t)$ функцияларына койуп

$$\begin{cases} D_{x,l}\left\{\exp\big(B(x,t,0)\big)\left[c_{l,1}^{0}(x)+\int_{0}^{t}a_{1}(x)\left(d_{l,1}(x,t)+\omega_{l,1}(x,t)\right)\exp\big(-B(x,t,0)\big)\,ds\right]\right\}=0 \\ D_{x,l}\left[\omega_{l,1}^{0}(x)\exp\big(-B(x,t,T)\big)\right]=2D_{x,l}\left[a(x)c_{l,1}(x,t)\exp\big(-B(x,t,0)\big)\right] \end{cases}$$

$D_{x,l}$ операторун иштетип жана $y_{l,1}(x,s)$ и $d_{l,1}(x,s)$ функцияларынын маанисин койуп алабыз

$$\exp\big(B(x,t,0)\big)\,D_{x,l}c_{l,1}^{0}(x)+c_{l,1}^{0}(x)D_{x,l}\exp\big(B(x,t,0)\big)$$
$$=\int_{0}^{t}D_{x,l}\left(\exp\big(B(x,t,0)\big)\frac{1}{\beta}\exp\big(-B(x,t,0)\big)\right)c_{l,1}(x,t)-$$

$$-\int_{0}^{t}D_{x,l}\big(a_{1}(x)\omega_{l,1}^{0}(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\exp\big(-B(x,s,0)\big)\big)\,ds$$

$$D_{x,l}\omega_{l,1}^{0}(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)+D_{x,l}\exp\big(-B(x,s,T)\big)\,\omega_{l,1}^{0}(x)=$$
$$=2D_{x,l}\big(a(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\big)c_{l,1}(x,t),\quad D_{x,l}c_{l,1}(x,t)\equiv 0$$

бул жерден топтоштуруп

$$2\varphi_{l}'(x)\frac{dc_{l,1}^{0}}{dx}+\gamma_{l}^{2}\left(c_{l,1}^{0}(x)\right)=H_{l,1}^{1}(x,t)c_{l,1}(x,T)+H_{l,1}^{2}(x,t)\omega_{l,1}^{0}(x)(A_{35})$$

$$H_{l,1}^{1}(x,t)=\int_{0}^{t}D_{x,l}\left[\exp\big(B(x,s,0)\big)\frac{1}{\beta}\exp\big(-B(x,s,0)\big)\right]ds-$$

$$-2\int_{0}^{t}D_{x,l}\left(a(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\cdot a_{1}(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\right)ds,$$

$$H_{l,1}^{2}(x,t)=D_{x,l}\big(a(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\big)$$

эске алып

$$D_{x,l}\big(\omega_{l,1}^{0}(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\big)=2D_{x,l}\big(a(x)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\big).$$

$$2\varphi_{l}'(x)\frac{d\omega_{l,1}^{0}}{dx}+\gamma_{l}^{1}(x,t)\omega_{l,1}^{0}(x)=H_{l,0}^{0}(x,t)\omega_{l,1}(x,T),(A_{36})$$

$$H_{l,0}^{0}(x,t) = 2\left[D_{x,l}a(x) - 2\varphi_l'(x)a(x)B_x'(x,t,\tau) + \varphi_l''(x)a(x)\right]$$

(A_{36}) тендемесин (A_{34}) деги баштапкы шарттардын негизинде чыгарабыз

$$\omega_{l,0}^{0}(x,t) = H_{l,0}^{3}(t) + H_{l,0}^{4}(t)c_{l,1}(l-1,T), \qquad (A_{37})$$

$$H_{l,0}^{3}(t) = \exp\big(B(l-1,s,T)\big)\frac{\sqrt{\pi(T-t)}Q_{l,t}(t)}{\varphi_l'(l-1)},$$

$$H_{l,0}^{4}(t) = 2a(l-1),$$

Мында $t-$ параметр катары кабыл алынат.

(A_{36}), (A_{37}) маселеси көрсөтулгөндөй чыгарылышкаээ

$$\omega_{l,1}^{0}(x) = \left[H_{l,0}^{3}(t) + H_{l,0}^{4}(t)c_{l,1}(l-1,T)\right]\cdot\exp\left(-\Gamma_{l,1}^{1}(x,t)\right) + \\ + \int_{l-1}^{x}\frac{1}{2\varphi_l'(s)}H_{l,0}^{0}(s,t)c_{l,1}(s,T)\exp\left(-\Gamma_{l,1}^{1}(x,t) + \Gamma_{l,1}^{1}(s,t)\right)ds,$$

$$\Gamma_{l,1}^{1}(x,t) = \int_{l-s}^{x}\frac{\gamma_l^1(s,t)ds}{2\varphi_l'(s)}.$$

Белгилөөлөрдү киргизип

$$H_{l,1}^{5}(t) = \exp\left(-\Gamma_{l,1}^{1}(x,t)\right)H_{l,1}^{3}(t), H_{l,1}^{6}(t) = H_{l,1}^{4}(t)\exp\left(-\Gamma_{l,1}^{1}(x,t)\right),$$

$$H_{l,1}^{7}(x,s,t) = \frac{1}{2\varphi_l'(s)}H_{l,1}^{0}(s,t)\exp\left(-\Gamma_{l,1}^{1}(x,t) + \Gamma_{l,1}^{1}(s,t)\right)$$

кайра жазабыз

$$\omega_{l,1}^{0}(x) = H_{l,1}^{5}(t) + H_{l,1}^{6}(t)c_{l,1}(l-1,T) + \int_{l-1}^{x}H_{l,1}^{7}(x,s,t)\,c_{l,1}(s,T)ds \qquad (A_{38})$$

(A_{35}) ке койуп баштапкы шарттары катары $d_{l,1}(l-1,t)$ жана $\omega_{l,1}(l-1,s)$, ны алып мындай жазабыз

$$\omega_{l,1}^{0}(l-1) = H_{l,1}^{8}(t) - \int_0^t a_1(l-1)\left(-2a(l-1)c_{l,1}(l-1,T)\exp\bigl(-B(l-1,s,T)\bigr) + \omega_{l,0}^{0}(l-1)\exp\bigl(-B(l-1,s,T)\bigr)\right)\exp\bigl(-B(l-1,s,0)\bigr)\,ds,$$

белгилөө жүргүзүп

$$H_{l,1}^{8}(t) = \frac{Q_{l,1}(t)}{2\varphi_l'(l-1)}\exp\bigl(-B(l-1,0)\bigr),$$

$$H_{l,1}^{9}(t) = \frac{1}{\beta}\int_0^t \exp\bigl(-B(l-1,s,T)\bigr)\exp\bigl(-B(l-1,s,0)\bigr)\,ds$$

$$H_{l,1}^{10}(t) = -a_1(l-1)\int_0^t \exp\bigl(-B(l-1,s,T)\bigr)\exp\bigl(-B(l-1,s,0)\bigr)\,ds$$

белгилөө жүргүзүп

$$c_{l,0}^{0}(l-1) = H_{l,1}^{8}(t) + H_{l,1}^{9}(t)c_{l,1}(l-1,T) + H_{l,1}^{10}(t)\omega_{l,0}^{0}(l-1).$$

кайра жазып

(A_{37}) деги маанини алып келип койуп$y_{l,0}^{0}(l-1)$

$$c_{l,0}^{0}(l-1) = H_{l,1}^{8}(t) + H_{l,1}^{9}(t)c_{l,1}(l-1,T) + H_{l,1}^{10}(t)\left[H_{l,1}^{3}(t) + H_{l,1}^{4}(t)c_{l,1}(l-1,T)\right] = H_{l,1}^{11}(t) + H_{l,1}^{12}(t)c_{l,1}(l-1,T), \qquad (A_{39})$$

$$H_{l,1}^{11}(t) = H_{l,1}^{8}(t) + H_{l,1}^{10}(t)H_{l,1}^{3}(t),$$

$$H_{l,1}^{12}(t) = H_{l,1}^{9}(t) + H_{l,1}^{10}(t)H_{l,1}^{4}(t).$$

(A_{35}) тендемеси (A_{38}) эске алуу менен (A_{39}) баштапкы шарты менен төмөнкү чыгарылышка ээ

$$c_{l,0}^{0}(x) = \exp\left(-\Gamma_{l,1}^{2}(x,t)\right)\left\{H_{l,1}^{11}(t) + H_{l,1}^{12}(t)c_{l,1}(l-1,T)\right.$$

$$+ \int_{l-1}^{x}\left[H_{l,1}^{1}(s,t)c_{l,1}(s,T)\right.$$

$$+ H_{l,1}^{2}(s,t)\left(H_{l,1}^{5}(t) + H_{l,1}^{6}(t)c_{l,1}(l-1,T)\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_{l-1}^{s} H_{l,1}^{7}(s,s_1,t)c_{l,1}(s_1,T)\,ds_1\right)\right]\exp\left(\Gamma_{l,1}^{2}(s,t)\right)ds\right\}$$

$$\equiv H_{l,1}^{13}(x,t) + H_{l,1}^{14}(x,t)c_{l,1}(l-1,T) + \int_{l-1}^{x} H_{l,1}^{15}(x,s,t)c_{l,1}(s,T), \quad (A_{40})$$

$$H_{l,1}^{13}(x,t) = \exp\left(-\Gamma_{l,1}^{2}(x,t)\right)\left[H_{l,1}^{11}(t) + \int_{l-1}^{x} H_{l,1}^{2}(s,t)\,H_{l,1}^{5}(t)\exp\left(\Gamma_{l,1}^{2}(s,t)\right)ds\right],$$

$$H_{l,1}^{14}(x,t) = \exp\left(-\Gamma_{l,1}^{2}(x,t)\right)\left[H_{l,1}^{12}(t) + \int_{l-1}^{x} H_{l,1}^{2}(s,t)\,H_{l,1}^{6}(t)\exp\left(\Gamma_{l,1}^{2}(s,t)\right)ds\right],$$

$$H_{l,1}^{15}(x,s,t) = \exp\left(-\Gamma_{l,1}^{2}(x,t)\right)\left[H_{l,1}^{1}(s,t) + \int_{s}^{x} H_{l,1}^{7}(s_1,s,t)\exp\left(\Gamma^{2}(s_1,t)\right)ds_1\right],$$

$$\Gamma_{l,1}^{2}(x,t) = \int_{l-s}^{x}\frac{\gamma_l^{2}(s,t)ds}{2\varphi_l'(s)}.$$

Табылган туюнтманы (A_{40}) дагы $c_{l,0}^{0}(x)$ үчүн (A_{33}) гө койобуз

$$c_{l,1}(x,T) = \exp\big(B(x,t,T)\big)\Bigg\{H_{l,1}^{13}(x,t) + H_{l,1}^{14}(x,t)c_{l,1}(l-1,T)$$

$$+ \int_{l-1}^{x} H_{l,1}^{15}(x,s,t)c_{l,1}(s,T)\,ds$$

$$+ \int_{0}^{t} a_1(x)\Bigg[-2a(x)c_{l,1}(x,T)\exp\big(-B(x,s,T)\big)$$

$$+ \left(H_{l,1}^{5}(s) + H_{l,1}^{6}(s)\omega_{l,1}(l-1,T) + \int_{l-1}^{x} H_{l,1}^{7}(x,s_1,s)\,\omega_{l,1}(s_1,T)ds_1\right)$$

$$\cdot \exp\big(-B(x,s,T)\big)\Bigg]\exp\big(-B(x,s,0)\big)\Bigg\}$$

Эки жагын тең $t = T$ деп

$$H_{l,1}^{16}(x) = \exp\big(B(x,T,0)\big)\Bigg[H_{l,1}^{13}(x,T)$$

$$+ \int_{0}^{T} a_1(x)\,H_{l,1}^{5}(s)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\exp\big(-B(x,s,0)\big)\,ds\Bigg]$$

$$H_{l,1}^{17}(x) = \exp\big(B(x,T,0)\big)\Bigg[H_{l,1}^{14}(x,T)$$

$$+ \int_{0}^{T} a_1(x)\,H_{l,1}^{6}(s)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\exp\big(-B(x,s,0)\big)\,ds\Bigg]$$

$$H_{l,1}^{18}(x) = \exp\big(B(x,T,0)\big)\Bigg[H_{l,1}^{15}(x,s,T)$$

$$+ \int_{0}^{T} H_{l,1}^{7}(x,s,s_1)\exp\big(-B(x,s,T)\big)\exp\big(-B(x,s,0)\big)\,ds\Bigg]$$

Кайра жазып

$[1+\frac{1}{\beta}\int_0^T \exp\big(-B(x,s,T)\big)\cdot\exp\big(-B(x,s,0)\big)\,ds]c_{l,1}(x,T) = H_{l,1}^{16}(x,t) + H_{l,1}^{17}(x,t)c_{l,1}(l-1,T) + \int_{l-1}^{x} H_{l,1}^{18}(x,s)\,c_{l,1}(s,T)ds$

Табылган теңдеме $\omega_{l,1}(s,T)$ ге салыштырмалуу экинчи тартиптеги Вольтерранын интегралдык теңдемеси болот анын чыгарылышы

$$c_{l,1}(s,T) = H_{l,1}^{19}(x,t) + H_{l,1}^{20}(x,t)c_{l,1}(l-1,T) + \int_{l-1}^{x} R_{l,1}(x,s)\left[H_{l,1}^{19}(s) + H_{l,1}^{20}(s)c_{l,1}(l-1,T)\right]ds, \quad (A_{40})$$

$$\gamma_3(x) = 1 + \frac{1}{\beta}\int_0^T \exp\big(-B(x,s,T)\big)\exp\big(-B(x,s,0)\big)\,ds \neq 0$$

$$H_{l,1}^{19}(x) = \frac{H_{l,1}^{16}(x)}{\gamma_3(x)}, \quad H_{l,1}^{20}(x) = \frac{H_{l,1}^{17}(x)}{\gamma_3(x)},$$

$R_{l,1}(x,s) - \frac{H_{l,1}^{18}(x)}{\gamma_3(x)}$ ядросунун резольвентасы

$x = l-1$ ди (A_{41}) ге койуп андан $\omega_{l,1}(l-1,T)$ аныктайбыз, андан $d_{l,1}(x,t)$, $c_{l,1}(x,t)$, $\omega_{l,1}(x,t)$ аныкталат.

Кийинки итераттоолордо каалагандай $\omega_{l,i}(x,t)$, $q_{l,i}(x,t)$,$d_{l,i}(x,t)$,$c_{l,i}(x,t)$ функциялары чыгарылышка кирет.

$$u_i(M) = v_i(x,t) + \sum_{l=1}^{2} c_{l,i}(x,t)J_{2,1}^{1}(t,\xi_l)\,,$$

$$y_i(M) = q_i(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\left[d_{l,i}(x,t)J_{2,1}^{1}(t,\xi_l) + \omega_{l,i}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right],$$

(12) жана (13) итераттык теңдемелери i нин баардык номери үчүн бир тектүү эмес теңдемелер менен аныкталат.

Андан ары жазылган процедураны улантып катарлардын (11) суммасынын бөлүктөрүнүн коэффициеттерин тапса болот.

Теорема. Мейли **А** шарты аткарылсын дейли, анда тургузулган бөлүктөрдүн суммасы (3.11) коюлган оптималдуу башкаруу маселесинин оптималдык асимптотикалык чыгарылышы болуп саналат.

Жыйынтык

Бул иште парабола тибиндеги теңдемелер менен баяндалган оптималдуу маселелердин асимптотикасы каралды. Аны регулярлоо жана итераттык маселелерди чыгаруу аркылуу сингулярдуу дүүлүккөн маселенин чыгарылышынын оптималдык асимптотикасы тургузулду. Оптималдык маселени табууда Понтрягиндин максимум приципи методу колдонулду.

Колдонулган адабияттар

[1] Liouville I. Sur le developpement des fonctions ou parties en series dont les divers termes sont assujettes a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre contenant une parametre variable//J. Math. Pure Appl. - 1837. - V. 2. -P. 16-35.

[2] Horn J. Uber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkuriichen Parameter//Math. Ann. - 1899. - Bd 52. - P. 340-362.

[3] Prandtl L. XJber Flussigkeitsbewegung her sehr kleiner Reibung//Verk. d. III,.Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Teubner. - 1905 - P. 484-494.

[4] Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Dif- ferential systeme als Funktionen eines Parameters // Math. Ann. - 1907. - Bd 63-P.277-300.

[5] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. - 1908. - V. 9. - P. 219-231.

[6] Trjitzinsky W.S. Theory oflinear differential equations containing a parameter //Acta Math. - 1936. - V. 67. - P. 1-50.

[7] Trjitzinsky W.I. Analytic theory of linear differential equations // Acta Math. - 1934. - V. 62. - P. 167-226.

[8] Тихонов А.Н О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем сб. - 1948. - 22(64), бас.2. - 193-204-б.

[9] Wasow W. Asymptotic solutions of boundary value problems for the differ- ential equation . Duke Math. J. - 1944. - V. 11. - P. 405-411.

[10] Бабич М.В., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.-М.: Наука, 1972

[11] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой линейных дифференциальных уравнений с малым параметром//УМН.-1957.-12, вып. 5.-с. 3-122.

[12] Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.:Наука, 1977. - 384 б.

[13 Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: Наука, 1988. 312 б.

[14] Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной // ДАН СССР. - 1957. - Т.117, бас-6. 935-938-б.

[15] Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром // ДАН СССР. - 1958. - Т.119, бас-6. 1077-1080 б.

[16] Треногий В.А Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем // УМН. - 1961. - 16, бас.1. 164-169 б.

[17] Треногий В.А Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника - Вишика // УМН. - 1970. 25-N 4, 121-156 б.

[18] Сабзалиев М.М. Асимптотика решения краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с малым параметром // Аз. ин-т нефти и химии-Баку, 1989, 19 б. Деп. Аз. НИИНТИ 24.04.89, N 1266-Аз89.

[19] Сушко В.Г. Асимптотика решения на угловой характеристике для параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, бас-5. 694-698 б.

[20] Сушко В.Г. Асимптотические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. бас-2. 570-586-б.

[21] Хапаев М.М. Проблемы устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. - 1980. - Т.35, вып.1(211). 127-170-б.

[22] Бутузов В.Ф. Угловой пограничный слой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными //Дифф.уравнения. 1979. Т.15, бас-10, 1848-1862 б.

[23] Васильева А.Б. О периодических решениях уравнений параболического типа с малыми параметрами // Дифф. уравнения. 1983. Т.19, бас-12. 2076-2081 б.

[24] Васильева А.Б.,Радченко И.В. О периодическом решении параболического сингулярно возмущенного уравнения с разными степенями малого параметра при первой и второй производных // ЖВМ и МФ. - 2000. Т.40, бас-8. 1192 б.

[25] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 б.

[26] Валиев М.А. Метод регуляризации сингулярно возмущенных дифференциальных операторных уравнений // ДАН СССР. 1974. Т.220, бас-5. 1008-1012 б.

[27] Валиев М.А.,Ломов С. А. Асимптотическое интегрирование сингулярно- возмущенных задач в гильбертовом пространстве // Дифф. уравн. 1981. Т.17, бас-10. 1792-1805 б.

[28] Рыжих А. Д Асимптотическое интегрирование уравнения в банаховом пространстве // Труды МЭИ. 1980. бас-499. 159-161 б.

[29] Елисеев А.Г.,Ломов С. А. Теория возмущений в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1982, Т.264, 34-38 б.

[30] Понтрягин Л.С., Болтянский В.И., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961.

[31] Капустян В.Е. Асимптотитеска ограниченных управлений в оптимальных билинейных элиптических задач // Докл. АН Украины. 1992. №9. С. 35-39.

[32] Данилин А.Р. Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 3-12.

[33] Омуралиев А.С., Рафатов Р. Об асимптотике решение одной задачи оптимального управления параболическим уравнением с малым параметром //АиТ. N 1,2011. С.66-79.

[35] Егоров А.И. Оптимальное управления тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.

Өмүр баян

Жеке маалымат

- Аты жөнү: Алыбек кызы Эльвира
- Улуту: Кыргыз
- Туулган жылы: 03.02.1990, Нарын
- Телефон: +996702004711
- e-mail: alybekovaelvira@gmail.com

Билими

- 2015- Кыргыз-Түрк Манас Университети, Табигый илимдер институту, Математика багыты, (Магистратура).
- 2013- Кыргыз-Түрк Манас Университети, Табигый илимдер факультети, Колдонмо математика жана иформатика бөлүмү, (Бакалавр).
- 2008- Асанбек Табалдиев атындагы орто мектеп.

Иш тажрыйбасы

- 2013- 2014- И. Раззаков атындагы Кыргыз Мамлекеттик Техникалык Университети, Колдонмо математика бөлүмү, Математика адиси
- 2014-2015- И. Раззаков атындагы Кыргыз Мамлекеттик Техникалык Университети, Колдонмо математика жана иформатика бөлүмү, Окутуучу.

Билген тилдери

- Кыргызча (Эне тили)
- Түркчө
- Орусча
- Англисче