Yüksek Lisans Tez Tezi Tezi Hazırlayan Burak OĞUL Anabilim Dalı Matematik 2015

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Hazırlayan
Burak OĞUL

Danışman
Yrd.Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2015
KIRGIZİSTAN/BİŞKEK

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Hazırlayan
Burak OĞUL

Danışman
Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2015
KIRGIZİSTAN/BİŞKEK

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Burak OĞUL

İmza :

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma ” adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Burak OĞUL	Doç.Dr. Dağıstan ŞİMŞEK
İmza:	İmza:

Matematik ABD Başkanı

Prof.Dr. Avıt ASANOV

İmza:

Doç.Dr Dağıstan ŞİMŞEK danışmanlığında Burak OĞUL tarafından hazırlanan “Fark Denklem Sisteminin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma ” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

……. /……../ ……

JÜRİ:

Danışman	:Doç.Dr Dağıstan ŞİMŞEK	…….
Üye	:Prof.Dr Muratalı CAMANBAYEV	…….
Üye	:Prof.Dr Asan ÖMÜRALİEV	…….
Üye	:Prof.Dr Avıt ASANOV	…….
Üye	:Yrd.Doç.Dr Ahmet DOĞAN	…….

ONAY :
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ……...… tarih ve ……..…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

……. /……../ ……

Prof. Dr. Zafer GÖNÜLALAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bu günlere gelmemde en büyük katkı sahibi sayın hocam Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK'e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, çalışmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Burak OĞUL

Bişkek, Haziran 2015

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Burak OĞUL

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2015

Danışman: Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

KISA ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu fark denklemleri ile ilgili bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik. Bu bölümde kaynaklarda yer alan 16 adet makale ve doktora tezlerinde yapılan çalışmalar hakkında kısa bilgiler verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili 7 tane genel tanım ve 1 tane teorem verildi.

Üçüncü bölümde, maksimumlu fark denklem sisteminin çözümleri ve çözümlerin davranışları incelendi. İnceleme aşamasında 2 Lemma, 4 Teorem ve son olarak da nümerik örnekler verildi. Lemmalar da maksimumlu fark denklem sisteminin çözüm davranışları incelendi. Teoremlerin 2 tanesinde değişik başlangıç şartlarına göre maksimumlu fark denklem sisteminin çözümleri tümevarım yöntemiyle incelendi. Diğer 2 teoremde ise maksimumlu fark denklem sisteminin çözümlerinin limit değerleri incelendi. Ayrıca; maksimumlu fark denklem sistemi için 4 farklı başlangıç değerine karşılık 4 tane örnek ve çözümleri verildi.

Dördüncü bölümde ise tez çalışmamız hakkındaki sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Maksimumlu Fark Denklem Sistemi, Çözümlerin Davranışları

АЙЫРМА ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШЫШТАРЫ ТУУРАЛУУ ИШ

Бурак ОГУЛ

Кыргыз-Турк Манас Университети, Табигий илимдер институту

Магистрдык иш, Июнь 2015

Илимий жетекчи: Доцент. Док. Дагыстан ШИМШЕК

КЕҢИРИ АННОТАЦИЯ

Бул диссертация 3 бөлүмдөн турат. Биринчи бөлүмдө максимумдуу айырма тендемелер менен байланыштуу илимий иштер жөнүндө маалымат берилген. Бул бөлүмдө адабияттарда бар болгон 16 макала жана доктордук диссертацияларда жасалган илимий иштер жөнүндө кыскача маалымат берилген.

Экинчи бөлүмдө, айырма тендемелер менен байланыштуу 7 жалпы аныктама жана 1 теория берилген.

Үчүнчү бөлүмдө максимумдуу айырма тендемелер системасынын чыгарылыштары изилденген. Изилдөө боюнча 2 Лемма, 4 Теорем жана сандык мисалдер берилген. Леммаларда максимумдуу айырма тендемелер системасынын чыгарылыштары изилденген. Теоремдердин экөөсүндө башкача башталуу шарттарына карата максимумдуу айырма тендемелер системасынын чыгарылыштары математикалык индукция методу менен изилденген. 2 теоремде болсо максимумдуу айырма тендемелер системасынын чыгарылыштарын лимит маанилери изилденген. Мындан сырткары максимумдуу айырма тендемелер системасы үчүн 4 башкача башталуу мааниси үчүн 4 мисал жана чыгарылыштары берилген.

Төртүнчү бөлүмдө болсо диссертация жөнүндө жыйынтык берилген.

Ачкыч сөздөр: Максимум айырма тендемеси, чыгарылыштарын изилдөөсү

ИССЛЕДОВАНИЕ О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бурак Огул

Кыргызско-Турецкий Университет Манас, Институт Естественных наук

Магистерская работа, июнь 2015

Научный руководитель: Доц Док. Дагыстан ШИМШЕК

Эта диссертация состоит из 3 разделов. В первом разделе предоставляется информация о научных работах связанных с максимумами разностных уравнений. В этом разделе предоставлена краткая информация о проделанных работах из имеющихся литератур 16 статей и докторских диссертациях.

Во втором разделе дано 7 общих определений и 1 теория связанная со разностными уравнениями.

В третьем разделе были исследованы решения систем максимумных разностных уравнений. По исследованиям даны 2 Леммы, 4 Теоремы и числовые примеры. В леммах исследованы решения систем макмимумных разностных уравнений. В двух теоремах с учетом иных начальных условий решения систем максимумных разностных уравнений были исследованы методом математической индукции. А в двух теоремах были исследованы значения лимита решений систем максимумных разностных уравнений. Кроме этого, даны для 4 с иной началом значений 4 примера с решениями для системы максимумных разностных уравнений.

В четвертом разделе предоставлено заключение о диссертации.

Ключевые слова: Максима разностного уравнения системы, поведение решений

A STUDY ON THE SOLUTİON OF THE DİFFERENCE EQUATİON OF SYSTEM

Burak OGUL

Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Institute of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2015

Supervisor: Assoc.Prof. Dagıstan SHIMSHEK

This study consists of three parts. In the first section, we gave information about some of the work which are related to the maximal of difference equations. This resource is located in part of Article 16 and were given a brief description of the work which was done in the doctoral thesis.

In the second part we give seven general definitions of difference equations and one theorem.

In the third section, we examine the solution of the maximal difference equations and their behavior. In this work we gave 2 Lemmas, four theorems and numerical examples. In lemmas were examined behavior of solutions system of maximal difference equations. In two theorems according to the different initial conditions solutions of the maximal difference equations were examined by the induction method. Also for system of maximal difference equations was given: For 4 different starting values 4 examples.

In the fourth part was given conclusions and recommendations of our thesis.

Keywords: System of maximal difference equations, Behavior of Solutions

İÇİNDEKİLER

FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Sayfa

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI iii
KABUL VE ONAY SAYFASI iv
ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR v
KISA ÖZET vi
GENİŞ ÖZET (Kırgızça) vii
ÖZET (Rusça) viii
ÖZET (İngilizce) ix
İÇİNDEKİLER x

1. BÖLÜM

GİRİŞ 1
1.1. Maksimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar……...1

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ ÇALIŞMADA KULLANILAN TANIM VE TEOREMLER…….6

3. BÖLÜM

MAKSİMUMLU FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ...……9

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER……..72

KAYNAKLAR 73

ÖZGEÇMİŞ……...75

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu çalışmada, maksimumlu fark denklem sisteminin çözümleri ve çözüm davranışları incelenmiştir.

Maksimumlu fark denklemleri ve denklem sistemleri ile ilgili literatürde var olan çalışmalardan büyük bir kısmı incelenmiştir. Bu kapsamlı araştırmanın ışığında, $x_{-4}; x_{-3}; x_{-2}; x_{-1}; x_0; y_{-4}; y_{-3}; y_{-2}; y_{-1}; y_0$ başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-4}}, \frac{y_{n-4}}{x_{n-4}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-4}}, \frac{x_{n-4}}{y_{n-4}}\right\}$ maksimumlu fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir. Çözümleri incelemek için dört orijinal teorem ve iki tane Lemma ifade ve ispat edilmiştir.

Öncelikle çalışmada kullanılan literatür özeti ele alınmıştır.

1.1. Maksimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Amleh (1998), G. Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A, B parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Janowski ve arkadaşları (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n^k, A\right\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde A, k parametreleri ve başlangıç şartlarının pozitif sayı değerleri aldıklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını A, k parametreleri ile başlangıç şartlarına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Valicenti (1999), yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1}=\frac{a_n x_n+b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1}=\frac{\max\left\{a_n x_n, b_n\right\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk olarak A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n, A\right\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Daha sonra, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiş ve son olarak ta $y_{n+1}=\frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif parametreler ve başlangıç şartları altında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayılarını pozitif sayı dizileri ve başlangıç şartlarını pozitif sayı olarak aldıkları $x_{n+1}=\frac{\max\left\{a_n\left(\prod_{i=n-k+1}^{n} x_i\right), b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^{n} x_i}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin süreklilik, sınırlılık ve periyodiklik özelliklerini incelemişlerdir.

Mishev ve arkadaşları (2002), $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin periyodikliği üzerine yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif sayı değerleri olarak kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada, A, B, C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A+B+C>0$ için $x_n=\max\left\{\frac{A}{x_{n-1}},\frac{B}{x_{n-3}},\frac{C}{x_{n-5}}\right\}$ fark denkleminin bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise, A ile B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_{n-k}},\frac{B}{x_{n-m}}\right\}$ maksimumlu fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir. A, B, k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümleri, çözümlerinin periyodikliği ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n^k,A\}}{x_n^l x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada; A'nın pozitif bir reel sayı, k, l ve başlangıç şartlarının da keyfi reel sayı değerleri olduğunu kabul ederek denklemin çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada; A_n, B_n pozitif terimli ve 3 periyotlu diziler olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $A, B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1} \ldots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \ldots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Simsek ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Simsek (2007), Bazı Fark Denklemlerinin Çözümleri Ve Periyodikliği Üzerine Bir Çalışma adlı doktora tezinde maksimumlu fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Yan ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $0 < \alpha < 1, A > 0, A \leq 1, \quad A > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç şartları için $x_n = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}^{\alpha}}, \frac{A}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu olduğunu göstermişlerdir

Simsek ve arkadaşları (2009), yaptıkları çalışmada; x{n+1}=max{1/x{n}, y{n}/x{n}} ; y{n+1}=max{1/y{n}, x{n}/y{n}} maksimumlu fark denklem sisteminin başlangıç şartlarını pozitif seçerek çözümlerini incelemişlerdir.

Simsek ve arkadaşları (2009), yaptıkları çalışmada; x{n+1}=max{A/x{n},y{n}/x{n}}, y{n+1}=max{A/y{n},x{n}/y{n}}, maksimumlu fark denklem sisteminde A yı ve başlangıç şartlarını pozitif seçerek çözümünü incelemişlerdir.

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ ÇALIŞMADA KULLANILAN TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan ve tezde kullanılan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumlarda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x 'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x 'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişkende y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir. Dikkat edilirse, fark denklemlerinin n 'in sürekli olduğu durumda diferansiyel denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır.

Birinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \, x \, I \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.4. $x_{n+1} = f(x_n,..., x_{n-k})$ n=0,1,2,… (2.1) fark denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x},..., \bar{x})$ oluyorsa $\bar{x}$ ye denge noktası denir.

Tanım 2.5. $\bar{x}$ (2.1) denkleminin pozitif bir denge noktası olsun. (2.1) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1},..., x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi $\bar{x}$ denge noktasına eşit veya büyük bütün terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $m \leq \infty$ olur ve burada

Ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} < \bar{x}$

ve

Ya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ dir.

Tanım 2.6. $\bar{x}$ (2.1) denkleminin negatif bir denge noktası olsun. (2.1) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi $\bar{x}$ denge noktasından daha küçük terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $m \leq \infty$ olur ve burada

Ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} \geq \bar{x}$

ve

Ya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ dir.

Tanım 2.7. $f_1 = 1, f_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ şeklinde tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir.

3. BÖLÜM

MAKSİMUMLU FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-4}}, \frac{y_{n-4}}{x_{n-4}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-4}}, \frac{x_{n-4}}{y_{n-4}}\right\} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Şimdi (3.1) denkleminin pozitif denge noktasını bulalım.

$\bar{x} = \max\left\{\frac{1}{\bar{x}}, \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right\}; \bar{y} = \max\left\{\frac{1}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right\}$ olur. Buradan

$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}}$ veya $\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}; \bar{y} = \frac{1}{\bar{y}}$ veya $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ elde edilir. $\left(\bar{x}\right)^2 = 1$ ve $\left(\bar{y}\right)^2 = 1$ bulunur. Buradan da

$\bar{x} = 1$ ve $\bar{y} = 1$ elde edilir. Şimdi (3.1) denkleminin çözümlerini inceleyelim.

X_n ÇÖZÜMLERİ

$1 < X_{-4} < Y_{-4}$ $\qquad\qquad$ $1 < Y_{-4} < X_{-4}$

$$X_{10n+1} = \left(\frac{Y_{-4}}{X_{-4}}\right)^{f(2n+2)} \qquad X_{10n+1} = \left(\frac{Y_{-4}}{X_{-4}}\right)^{f(2n+1)}$$

. $\qquad\qquad$.

. $\qquad\qquad$.

. $\qquad\qquad$.

$$X_{10n+6} = \left(\frac{X_{-4}}{Y_{-4}}\right)^{f(2n+2)} \qquad X_{10n+6} = \left(\frac{X_{-4}}{Y_{-4}}\right)^{f(2n+3)}$$

$1 < \mathrm{X}_{-3} < \mathrm{Y}_{-3}$

$$X_{10n+2} = \left(\frac{Y_{-3}}{X_{-3}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$X_{10n+7} = \left(\frac{X_{-3}}{Y_{-3}}\right)^{f(2n+2)}$$

$1 < \mathrm{X}_{-2} < \mathrm{Y}_{-2}$

$$X_{10n+3} = \left(\frac{Y_{-2}}{X_{-2}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$X_{10n+8} = \left(\frac{X_{-2}}{Y_{-2}}\right)^{f(2n+2)}$$

$1 < \mathrm{X}_{-1} < \mathrm{Y}_{-1}$

$1 < \mathrm{Y}_{-3} < \mathrm{X}_{-3}$

$$X_{10n+2} = \left(\frac{Y_{-3}}{X_{-3}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$X_{10n+7} = \left(\frac{X_{-3}}{Y_{-3}}\right)^{f(2n+3)}$$

$1 < \mathrm{Y}_{-2} < \mathrm{X}_{-2}$

$$X_{10n+3} = \left(\frac{Y_{-2}}{X_{-2}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$X_{10n+8} = \left(\frac{X_{-2}}{Y_{-2}}\right)^{f(2n+3)}$$

$1 < \mathrm{Y}_{-1} < \mathrm{X}_{-1}$

$$X_{10n+4} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$X_{10n+9} = \left(\frac{X_{-1}}{Y_{-1}}\right)^{f(2n+2)}$$

$$1 < \mathrm{X}_0 < \mathrm{Y}_0$$

$$X_{10n+5} = \left(\frac{Y_0}{X_0}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$X_{10n+10} = \left(\frac{X_0}{Y_0}\right)^{f(2n+2)}$$

$$X_{10n+4} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$X_{10n+9} = \left(\frac{X_{-1}}{Y_{-1}}\right)^{f(2n+3)}$$

$$1 < \mathrm{Y}_0 < \mathrm{X}_0$$

$$X_{10n+5} = \left(\frac{Y_0}{X_0}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$X_{10n+10} = \left(\frac{X_0}{Y_0}\right)^{f(2n+3)}$$

$\boldsymbol{Y_n}$ ÇÖZÜMLERİ

$$1 < \mathrm{X}_{-4} < \mathrm{Y}_{-4}$$

$$1 < \mathrm{Y}_{-4} < \mathrm{X}_{-4}$$

$$Y_{10n+1} = \left(\frac{X_{-4}}{Y_{-4}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+6} = \left(\frac{Y_{-4}}{X_{-4}}\right)^{f(2n+2)}$$

$$1 < X_{-3} < Y_{-3}$$

$$Y_{10n+2} = \left(\frac{X_{-3}}{Y_{-3}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+7} = \left(\frac{Y_{-3}}{X_{-3}}\right)^{f(2n+3)}$$

$$1 < X_{-2} < Y_{-2}$$

$$Y_{10n+3} = \left(\frac{X_{-2}}{Y_{-2}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

$$Y_{10n+1} = \left(\frac{X_{-4}}{Y_{-4}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+6} = \left(\frac{Y_{-4}}{X_{-4}}\right)^{f(2n+2)}$$

$$1 < Y_{-3} < X_{-3}$$

$$Y_{10n+2} = \left(\frac{X_{-3}}{Y_{-3}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+7} = \left(\frac{Y_{-3}}{X_{-3}}\right)^{f(2n+2)}$$

$$1 < Y_{-2} < X_{-2}$$

$$Y_{10n+3} = \left(\frac{X_{-2}}{Y_{-2}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+8} = \left(\frac{Y_{-2}}{X_{-2}}\right)^{f(2n+3)}$$

$1 < \mathrm{X}_{-1} < \mathrm{Y}_{-1}$

$$Y_{10n+4} = \left(\frac{X_{-1}}{Y_{-1}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+9} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+3)}$$

$1 < \mathrm{X}_{0} < \mathrm{Y}_{0}$

$$Y_{10n+5} = \left(\frac{X_{0}}{Y_{0}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+10} = \left(\frac{Y_{0}}{X_{0}}\right)^{f(2n+3)}$$

.

.

$$Y_{10n+8} = \left(\frac{Y_{-2}}{X_{-2}}\right)^{f(2n+2)}$$

$1 < \mathrm{Y}_{-1} < \mathrm{X}_{-1}$

$$Y_{10n+4} = \left(\frac{X_{-1}}{Y_{-1}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+9} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+2)}$$

$1 < \mathrm{Y}_{0} < \mathrm{X}_{0}$

$$Y_{10n+5} = \left(\frac{X_{0}}{Y_{0}}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+10} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+2)}$$

X_n ÇÖZÜMLERİ

$0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+1} = \left(\frac{1}{x_{-4}}\right)$

$x_{10n+1} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+1)}$ $n = 1,2,3,...$

.

.

.

$x_{10n+6} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+1)}$ $n = 0.1,2,3,...$

$0 < y_{-4} < x_{-4} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+1} = \left(\frac{1}{x_{-4}}\right)$

$x_{10n+1} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n)}$

.

.

.

$x_{10n+6} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+2)}$

$0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+2} = \left(\frac{1}{x_{-3}}\right)$

$x_{10n+2} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+1)}$ $n = 1,2,3,...$

.

.

.

$x_{10n+7} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+1)}$ $n = 0.1,2,3,...$

$0 < y_{-3} < x_{-3} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+2} = \left(\frac{1}{x_{-3}}\right)$

$x_{10n+2} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n)}$

.

.

.

$x_{10n+7} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+2)}$

$0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+3} = \left(\frac{1}{x_{-2}} \right)$

$$x_{10n+3} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}} \right)^{f(2n+1)} \quad n = 1,2,3,...$$

.

.

.

$$x_{10n+8} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}} \right)^{f(2n+1)} \quad n = 0.1,2,3,...$$

$0 < y_{-2} < x_{-2} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+8} = \left(\frac{1}{x_{-2}} \right)$

$$x_{10n+8} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}} \right)^{f(2n)}$$

.

.

.

$$x_{10n+9} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}} \right)^{f(2n+2)}$$

$0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+4} = \left(\frac{1}{x_{-1}} \right)$

$$x_{10n+4} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \right)^{f(2n+1)} \quad n = 1,2,3,...$$

.

.

.

$$x_{10n+9} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}} \right)^{f(2n+1)} \quad n = 0.1,2,3,...$$

$0 < y_{-1} < x_{-1} < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+4} = \left(\frac{1}{x_{-1}} \right)$

$$x_{10n+4} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \right)^{f(2n)}$$

.

.

.

$$x_{10n+9} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}} \right)^{f(2n+2)}$$

$0 < x_0 < y_0 < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+5} = \left(\frac{1}{x_0}\right)$

$x_{10n+5} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n+1)}$ $n = 1,2,3,...$

.

.

.

$x_{10n+10} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2n+1)}$ $n = 0.1,2,3,...$

$0 < y_0 < x_0 < 1$

$n = 0$ için $x_{10n+5} = \left(\frac{1}{x_0}\right)$

$x_{10n+5} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n)}$

.

.

.

$x_{10n+10} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2n+2)}$

Y_n ÇÖZÜMLERİ

$0 < X_{-4} < Y_{-4} < 1$

$Y_{10n+1} = \left(\frac{X_{-4}}{Y_{-4}}\right)^{f(2n)}$

.

.

.

$Y_{10n+6} = \left(\frac{Y_{-4}}{X_{-4}}\right)^{f(2n+2)}$

$0 < Y_{-4} < X_{-4} < 1$

$Y_{10n+1} = \left(\frac{X_{-4}}{Y_{-4}}\right)^{f(2n+1)}$

.

.

.

$Y_{10n+6} = \left(\frac{Y_{-4}}{X_{-4}}\right)^{f(2n+1)}$

$0 < \mathrm{X}_{-3} < \mathrm{Y}_{-3} < 1$

$$Y_{10n+2} = \left(\frac{X_{-3}}{Y_{-3}}\right)^{f(2n)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+7} = \left(\frac{Y_{-3}}{X_{-3}}\right)^{f(2n+2)}$$

$0 < \mathrm{Y}_{-3} < \mathrm{X}_{-3} < 1$

$$Y_{10n+2} = \left(\frac{X_{-3}}{Y_{-3}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+7} = \left(\frac{Y_{-3}}{X_{-3}}\right)^{f(2n+1)}$$

$0 < \mathrm{X}_{-2} < \mathrm{Y}_{-2} < 1$

$$Y_{10n+3} = \left(\frac{X_{-2}}{Y_{-2}}\right)^{f(2n)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+8} = \left(\frac{Y_{-2}}{X_{-2}}\right)^{f(2n+2)}$$

$0 < \mathrm{Y}_{-2} < \mathrm{X}_{-2} < 1$

$$Y_{10n+3} = \left(\frac{X_{-2}}{Y_{-2}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+8} = \left(\frac{Y_{-2}}{X_{-2}}\right)^{f(2n+1)}$$

$0 < \mathrm{X}_{-1} < \mathrm{Y}_{-1} < 1$

$$Y_{10n+4} = \left(\frac{X_{-1}}{Y_{-1}}\right)^{f(2n)}$$

$0 < \mathrm{Y}_{-1} < \mathrm{X}_{-1} < 1$

$$Y_{10n+4} = \left(\frac{X_{-1}}{Y_{-1}}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+9} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+2)}$$

$$0 < X_0 < Y_0 < 1$$

$$Y_{10n+5} = \left(\frac{X_0}{Y_0}\right)^{f(2n)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+10} = \left(\frac{Y_0}{X_0}\right)^{f(2n+2)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+9} = \left(\frac{Y_{-1}}{X_{-1}}\right)^{f(2n+1)}$$

$$0 < Y_0 < X_0 < 1$$

$$Y_{10n+5} = \left(\frac{X_0}{Y_0}\right)^{f(2n+1)}$$

.

.

.

$$Y_{10n+10} = \left(\frac{Y_0}{X_0}\right)^{f(2n+1)}$$

Lemma 1 : (3.1) denklemi için $1 < x_{-4} < y_{-4}$, $1 < x_{-3} < y_{-3}$, $1 < x_{-2} < y_{-2}$, $1 < x_{-1} < y_{-1}$ ve $1 < x_0 < y_0$ başlangıç şartlarına göre ,

Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- **a)** Her pozitif yarı dönme beş terimden oluşur.
- **b)** Her negatif yarı dönme beş terimden oluşur.
- **c)** Beş uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.
- **d)** Beş uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat :

$1 < x_{-4} < y_{-4}$, $1 < x_{-3} < y_{-3}$, $1 < x_{-2} < y_{-2}$, $1 < x_{-1} < y_{-1}$ ve $1 < x_0 < y_0$ başlangıç şartlarına göre

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-4}}, \frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right\} = \frac{y_{-4}}{x_{-4}} > \bar{x}$$

$$y_1 = \max\left\{\frac{1}{y_{-4}}, \frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} < \bar{y}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-3}}, \frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right\} = \frac{y_{-3}}{x_{-3}} > \bar{x}$$

$$y_2 = \max\left\{\frac{1}{y_{-3}}, \frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} < \bar{y}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, \frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right\} = \frac{y_{-2}}{x_{-2}} > \bar{x}$$

$$y_3 = \max\left\{\frac{1}{y_{-2}}, \frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} < \bar{y}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_{-1}} > \bar{x}$$

$$y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} < \bar{y}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right\} = \frac{y_0}{x_0} > \bar{x}$$

$$y_5 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_0}{y_0}\right\} = \frac{x_0}{y_0} < \bar{y}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} > \bar{x}$$

$$y_6 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1}\right\} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} > \bar{x}$$

$$y_7 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_8 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{y_3}{x_3}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} > \bar{x}$$

$$y_8 = \max\left\{\frac{1}{y_3}, \frac{x_3}{y_3}\right\} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_9 = \max\left\{\frac{1}{x_4}, \frac{y_4}{x_4}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} > \bar{x}$$

$$y_9 = \max\left\{\frac{1}{y_4}, \frac{x_4}{y_4}\right\} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{10} = \max\left\{\frac{1}{x_5}, \frac{y_5}{x_5}\right\} = \frac{x_0}{y_0} > \bar{x}$$

$$y_{10} = \max\left\{\frac{1}{y_5}, \frac{x_5}{y_5}\right\} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{11} = \max\left\{\frac{1}{x_6}, \frac{y_6}{x_6}\right\} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{11} = \max\left\{\frac{1}{y_6}, \frac{x_6}{y_6}\right\} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{12} = \max\left\{\frac{1}{x_7}, \frac{y_7}{x_7}\right\} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{12} = \max\left\{\frac{1}{y_7}, \frac{x_7}{y_7}\right\} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{13} = \max\left\{\frac{1}{x_8}, \frac{y_8}{x_8}\right\} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{13} = \max\left\{\frac{1}{y_8}, \frac{x_8}{y_8}\right\} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{14} = \max\left\{\frac{1}{x_9}, \frac{y_9}{x_9}\right\} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{14} = \max\left\{\frac{1}{y_9}, \frac{x_9}{y_9}\right\} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{15} = \max\left\{\frac{1}{x_{10}}, \frac{y_{10}}{x_{10}}\right\} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{15} = \max\left\{\frac{1}{y_{10}}, \frac{x_{10}}{y_{10}}\right\} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 < \bar{y}$$

.

.

.

elde edilir.

$x_1 > \bar{x}$, $x_2 > \bar{x}$, $x_3 > \bar{x}$, $x_4 > \bar{x}$, $x_5 > \bar{x}$, $x_6 < \bar{x}$, $x_7 < \bar{x}$, $x_8 < \bar{x}$, $x_9 < \bar{x}$, $x_{10} < \bar{x}$, … buradan da görüldüğü gibi x_n çözümleri PPPPPNNNNNPPPPPNNNNN… şeklindedir.

$y_1 < \bar{y}$, $y_2 < \bar{y}$, $y_3 < \bar{y}$, $y_4 < \bar{y}$, $y_5 < \bar{y}$, $y_6 > \bar{y}$, $y_7 > \bar{y}$, $y_8 > \bar{y}$, $y_9 > \bar{y}$, $y_{10} > \bar{y}$, … buradan da görüldüğü gibi x_n çözümleri NNNNNPPPPPNNNNNPPPPP… şeklindedir.

Her pozitif yarı dönmenin beş terimden oluştuğu görülmektedir.

Her negatif yarı dönmenin beş terimden oluştuğu görülmektedir.

Beş uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki negatif yarı dönmenin takip ettiği x_n çözümlerinden görülmektedir.

Beş uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki pozitif yarı dönmenin takip ettiği y_n çözümlerinden görülmektedir.

Böylece Lemmanın ispatı gösterilmiştir.

Lemma 2 : (3.1) denklemi için $0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$, $0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$, $0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$, $0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ ve $0 < x_0 < y_0 < 1$ başlangıç şartlarına göre ,

Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) x_n çözümleri için her pozitif yarı dönme beş terimden oluşur. y_n çözümleri için $n \geq 5$ için her pozitif yarı dönme beş terimden oluşur.

b) x_n çözümleri için her negatif yarı dönme beş terimden oluşur. y_n çözümleri için $n \geq 5$ için her negatif yarı dönme beş terimden oluşur.

c) x_n çözümleri için beş uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder. y_n çözümleri için $n \geq 5$ için beş uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.

d) x_n çözümleri için beş uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder. y_n çözümleri için $n \geq 5$ için beş uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder

İspat

$0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$, $0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$, $0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$, $0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ ve $0 < x_0 < y_0 < 1$

Başlangıç şartlarına göre

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-4}}, \frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right\} = \frac{1}{x_{-4}} > \bar{x}$$

$$y_1 = \max\left\{\frac{1}{y_{-4}}, \frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right\} = \frac{1}{y_{-4}} > \bar{y}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-3}}, \frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right\} = \frac{1}{x_{-3}} > \bar{x}$$

$$y_2 = \max\left\{\frac{1}{y_{-3}}, \frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right\} = \frac{1}{y_{-3}} > \bar{y}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, \frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-2}} > \bar{x}$$

$$y_3 = \max\left\{\frac{1}{y_{-2}}, \frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right\} = \frac{1}{y_{-2}} > \bar{y}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} > \bar{x}$$

$$y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right\} = \frac{1}{y_{-1}} > \bar{y}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0} > \bar{x}$$

$$y_5 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_0}{y_0}\right\} = \frac{1}{y_0} > \bar{y}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} < \bar{x}$$

$$y_6 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1}\right\} = \frac{y_{-4}}{x_{-4}} > \bar{y}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} < \bar{x}$$

$$y_7 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \frac{y_{-3}}{x_{-3}} > \bar{y}$$

$$x_8 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{y_3}{x_3}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} < \bar{x}$$

$$y_8 = \max\left\{\frac{1}{y_3}, \frac{x_3}{y_3}\right\} = \frac{y_{-2}}{x_{-2}} > \bar{y}$$

$$x_9 = \max\left\{\frac{1}{x_4}, \frac{y_4}{x_4}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} < \bar{x}$$

$$y_9 = \max\left\{\frac{1}{y_4}, \frac{x_4}{y_4}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_{-1}} > \bar{y}$$

$$x_{10} = \max\left\{\frac{1}{x_5}, \frac{y_5}{x_5}\right\} = \frac{x_0}{y_0} < \bar{x}$$

$$y_{10} = \max\left\{\frac{1}{y_5}, \frac{x_5}{y_5}\right\} = \frac{y_0}{x_0} > \bar{y}$$

$$x_{11} = \max\left\{\frac{1}{x_6}, \frac{y_6}{x_6}\right\} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{11} = \max\left\{\frac{1}{y_6}, \frac{x_6}{y_6}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} < \bar{y}$$

$$x_{12} = \max\left\{\frac{1}{x_7}, \frac{y_7}{x_7}\right\} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{12} = \max\left\{\frac{1}{y_7}, \frac{x_7}{y_7}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} < \bar{y}$$

$$x_{13} = \max\left\{\frac{1}{x_8}, \frac{y_8}{x_8}\right\} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{13} = \max\left\{\frac{1}{y_8}, \frac{x_8}{y_8}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} < \bar{y}$$

$$x_{14} = \max\left\{\frac{1}{x_9}, \frac{y_9}{x_9}\right\} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{14} = \max\left\{\frac{1}{y_9}, \frac{x_9}{y_9}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} < \bar{y}$$

$$x_{15} = \max\left\{\frac{1}{x_{10}}, \frac{y_{10}}{x_{10}}\right\} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{15} = \max\left\{\frac{1}{y_{10}}, \frac{x_{10}}{y_{10}}\right\} = \frac{x_0}{y_0} < \bar{y}$$

.

.

.

elde edilir.

$x_1 > \bar{x}$, $x_2 > \bar{x}$, $x_3 > \bar{x}$, $x_4 > \bar{x}$, $x_5 > \bar{x}$, $x_6 < \bar{x}$, $x_7 < \bar{x}$, $x_8 < \bar{x}$, $x_9 < \bar{x}$, $x_{10} < \bar{x}$, … buradan da görüldüğü gibi x_n çözümleri PPPPPNNNNNPPPPPNNNNN… şeklindedir.

$y_1 > \bar{y}$, $y_2 > \bar{y}$, $y_3 > \bar{y}$, $y_4 > \bar{y}$, $y_5 > \bar{y}$, $y_6 > \bar{y}$, $y_7 > \bar{y}$, $y_8 > \bar{y}$, $y_9 > \bar{y}$, $y_{10} > \bar{y}$, $y_{11} < \bar{y}$, $y_{12} < \bar{y}$, $y_{13} < \bar{y}$, $y_{14} < \bar{y}$, $y_{15} < \bar{y}$ … buradan da görüldüğü gibi y_n çözümleri $n \geq 5$ için PPPPPNNNNNPPPPPNNNNN … şeklindedir.

x_n çözümleri için her pozitif yarı dönmenin beş terimden oluştuğu görülmektedir.

y_n çözümleri $n \geq 5$ için her pozitif yarı dönmenin beş terimden oluştuğu görülmektedir

x_n çözümleri için her negatif yarı dönmenin beş terimden oluştuğu görülmektedir.

y_n çözümleri $n \geq 5$ için her negatif yarı dönmenin beş terimden oluştuğu görülmektedir

Beş uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki negatif yarı dönmenin takip ettiği x_n çözümlerinden görülmektedir.

Beş uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi beş uzunluğundaki pozitif yarı dönmenin takip ettiği $n \geq 5$ şartı altındaki y_n çözümlerinden görülmektedir.

Böylece Lemmanın ispatı gösterilmiştir.

Teorem 1 : $(x_n; y_n)$ (3.1) denkleminin $1 < x_{-4} < y_{-4}$ $1 < x_{-3} < y_{-3}$, $1 < x_{-2} < y_{-2}$, $1 < x_{-1} < y_{-1}$ $1 < x_0 < y_0$ şartları altındaki çözümü olsun. , n = 0,1,2 ,… için

$$x_{10n+1}=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+2}=\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+3}=\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+4}=\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2n+2)};$$

$$x_{10n+5}=\left(\frac{y_{0}}{x_{0}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+6}=\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+7}=\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+8}=\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n+2)};$$

$$x_{10n+9}=\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n+2)};x_{10n+10}=\left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{f(2n+2)}$$

$$y_{10n+1}=\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+1)};y_{10n+2}=\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+1)};y_{10n+3}=\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n+1)};y_{10n+4}=\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n+1)};$$

$$y_{10n+5}=\left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{f(2n+1)};y_{10n+6}=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+3)};y_{10n+7}=\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+3)};y_{10n+8}=\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2n+3)};$$

$$y_{10n+9}=\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2n+3)};y_{10n+10}=\left(\frac{y_{0}}{x_{0}}\right)^{f(2n+3)}$$

İspat

Bu teoremin ispatını tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-4}},\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right\}=\frac{y_{-4}}{x_{-4}}>\bar{x}$$

$$y_1=\max\left\{\frac{1}{y_{-4}},\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right\}=\frac{x_{-4}}{y_{-4}}<\bar{y}$$

$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_{-3}},\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right\}=\frac{y_{-3}}{x_{-3}}>\bar{x}$$

$$y_2=\max\left\{\frac{1}{y_{-3}},\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right\}=\frac{x_{-3}}{y_{-3}}<\bar{y}$$

$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_{-2}},\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right\}=\frac{y_{-2}}{x_{-2}}>\bar{x}$$

$$y_3=\max\left\{\frac{1}{y_{-2}},\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right\}=\frac{x_{-2}}{y_{-2}}<\bar{y}$$

$$x_4=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right\}=\frac{y_{-1}}{x_{-1}}>\bar{x}$$

$$y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} < \bar{y}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right\} = \frac{y_0}{x_0} > \bar{x}$$

$$y_5 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_0}{y_0}\right\} = \frac{x_0}{y_0} < \bar{y}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} > \bar{x}$$

$$y_6 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1}\right\} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} > \bar{x}$$

$$y_7 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_8 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{y_3}{x_3}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} > \bar{x}$$

$$y_8 = \max\left\{\frac{1}{y_3}, \frac{x_3}{y_3}\right\} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_9 = \max\left\{\frac{1}{x_4}, \frac{y_4}{x_4}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} > \bar{x}$$

$$y_9 = \max\left\{\frac{1}{y_4}, \frac{x_4}{y_4}\right\} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{10} = \max\left\{\frac{1}{x_5}, \frac{y_5}{x_5}\right\} = \frac{x_0}{y_0} > \bar{x}$$

$$y_{10} = \max\left\{\frac{1}{y_5}, \frac{x_5}{y_5}\right\} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{11} = \max\left\{\frac{1}{x_6}, \frac{y_6}{x_6}\right\} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{11} = \max\left\{\frac{1}{y_6}, \frac{x_6}{y_6}\right\} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{12} = \max\left\{\frac{1}{x_7}, \frac{y_7}{x_7}\right\} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{12} = \max\left\{\frac{1}{y_7}, \frac{x_7}{y_7}\right\} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{13} = \max\left\{\frac{1}{x_8}, \frac{y_8}{x_8}\right\} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{13} = \max\left\{\frac{1}{y_8}, \frac{x_8}{y_8}\right\} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{14} = \max\left\{\frac{1}{x_9}, \frac{y_9}{x_9}\right\} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{14} = \max\left\{\frac{1}{y_9}, \frac{x_9}{y_9}\right\} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^2 < \bar{y}$$

$$x_{15} = \max\left\{\frac{1}{x_{10}}, \frac{y_{10}}{x_{10}}\right\} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^3 > \bar{x}$$

$$y_{15} = \max\left\{\frac{1}{y_{10}}, \frac{x_{10}}{y_{10}}\right\} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 < \bar{y}$$

.

.

.

n = 0 için doğrudur. n = k için doğru olduğunu kabul edelim.

$$x_{10k+1}=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+2}=\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+3}=\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+4}=\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)};$$

$$x_{10k+5}=\left(\frac{y_{0}}{x_{0}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+6}=\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+7}=\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+8}=\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)};$$

$$x_{10k+9}=\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)};\ x_{10k+10}=\left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{f(2k+2)}$$

$$y_{10k+1}=\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+1)};\ y_{10k+2}=\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+1)};\ y_{10k+3}=\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+1)};\ y_{10k+4}=\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+1)};$$

$$y_{10k+5}=\left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{f(2k+1)};\ y_{10k+6}=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)};\ y_{10k+7}=\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)};\ y_{10k+8}=\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)};$$

$$y_{10k+9}=\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)};\ y_{10k+10}=\left(\frac{y_{0}}{x_{0}}\right)^{f(2k+3)}$$

n = k+1 için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{10k+11}=\max\left\{\frac{1}{x_{10k+6}},\frac{y_{10k+6}}{x_{10k+6}}\right\}=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\frac{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+11} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+6}}, \frac{x_{10k+6}}{y_{10k+6}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$x_{10k+12} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+7}}, \frac{y_{10k+7}}{x_{10k+7}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+12} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+7}}, \frac{x_{10k+7}}{y_{10k+7}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$x_{10k+13} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+8}}, \frac{y_{10k+8}}{x_{10k+8}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+13} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+8}}, \frac{x_{10k+8}}{y_{10k+8}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-32}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$x_{10k+14} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+8}}, \frac{y_{10k+9}}{x_{10k+9}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+14} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+9}}, \frac{x_{10k+9}}{y_{10k+9}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$x_{10k+15} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+10}}, \frac{y_{10k+8}}{x_{10k+10}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+15} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+10}}, \frac{x_{10k+10}}{y_{10k+10}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}$$

$$x_{10k+16} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+11}}, \frac{y_{10k+11}}{x_{10k+11}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}, \frac{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+16} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+11}}, \frac{x_{10k+11}}{y_{10k+11}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}}{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+5)}$$

$$x_{10k+17} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+12}}, \frac{y_{10k+12}}{x_{10k+12}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}, \frac{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+17} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+12}}, \frac{x_{10k+12}}{y_{10k+12}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}}{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+5)}$$

$$x_{10k+18} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+13}}, \frac{y_{10k+13}}{x_{10k+13}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}, \frac{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+18} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+13}}, \frac{x_{10k+13}}{y_{10k+13}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}}{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+5)}$$

$$x_{10k+19} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+14}}, \frac{y_{10k+14}}{x_{10k+14}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}, \frac{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+19} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+14}}, \frac{x_{10k+14}}{y_{10k+14}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}}{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+5)}$$

$$x_{10k+20} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+15}}, \frac{y_{10k+15}}{x_{10k+15}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}, \frac{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}$$

$$y_{10k+20} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+15}}, \frac{x_{10k+15}}{y_{10k+15}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}}{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+5)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+5)}$$

Böylece teoeremin doğruluğu ispatlanmış oldu.

Teoerem2 $(x_n; y_n)$ (3.1) denkleminin $0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$, $0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$, $0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$, $0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ ve $0 < x_0 < y_0 < 1$ başlangıç şartları altındaki çözümü olsun. , n = 0,1,2 ,… için

$$x_{10n+1} = \left(\frac{1}{x_{-4}}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+2} = \left(\frac{1}{x_{-3}}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+3} = \left(\frac{1}{x_{-2}}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+4} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{f(2n+1)};$$

$$x_{10n+5} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+6} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+7} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+8} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n+1)};$$

$$x_{10n+9} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n+1)}; x_{10n+10} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2n+1)}$$

$$y_{10n+1} = \left(\frac{1}{y_{-4}}\right)^{f(2n)}; y_{10n+2} = \left(\frac{1}{y_{-3}}\right)^{f(2n)}; y_{10n+3} = \left(\frac{1}{y_{-2}}\right)^{f(2n)}; y_{10n+4} = \left(\frac{1}{y_{-1}}\right)^{f(2n)};$$

$$y_{10n+5} = \left(\frac{1}{y_0}\right)^{f(2n)}; y_{10n+6} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+2)}; y_{10n+7} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+2)}; y_{10n+8} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2n+2)};$$

$$y_{10n+9} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2n+2)}; y_{10n+10} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n+2)}$$

İspat

Bu teoremin ispatını tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-4}}, \frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right\} = \frac{1}{x_{-4}} > \bar{x}$$

$$y_1 = \max\left\{\frac{1}{y_{-4}}, \frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right\} = \frac{1}{y_{-4}} > \bar{y}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-3}}, \frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right\} = \frac{1}{x_{-3}} > \bar{x}$$

$$y_2 = \max\left\{\frac{1}{y_{-3}}, \frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right\} = \frac{1}{y_{-3}} > \bar{y}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, \frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-2}} > \bar{x}$$

$$y_3 = \max\left\{\frac{1}{y_{-2}}, \frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right\} = \frac{1}{y_{-2}} > \bar{y}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} > \bar{x}$$

$$y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right\} = \frac{1}{y_{-1}} > \bar{y}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0} > \bar{x}$$

$$y_5 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_0}{y_0}\right\} = \frac{1}{y_0} > \bar{y}$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_1}{x_1}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} < \bar{x}$$

$$y_6 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1}\right\} = \frac{y_{-4}}{x_{-4}} > \bar{y}$$

$$x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} < \bar{x}$$

$$y_7 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \frac{y_{-3}}{x_{-3}} > \bar{y}$$

$$x_8 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{y_3}{x_3}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} < \bar{x}$$

$$y_8 = \max\left\{\frac{1}{y_3}, \frac{x_3}{y_3}\right\} = \frac{y_{-2}}{x_{-2}} > \bar{y}$$

$$x_9 = \max\left\{\frac{1}{x_4}, \frac{y_4}{x_4}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} < \bar{x}$$

$$y_9 = \max\left\{\frac{1}{y_4}, \frac{x_4}{y_4}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_{-1}} > \bar{y}$$

$$x_{10} = \max\left\{\frac{1}{x_5}, \frac{y_5}{x_5}\right\} = \frac{x_0}{y_0} < \bar{x}$$

$$y_{10} = \max\left\{\frac{1}{y_5}, \frac{x_5}{y_5}\right\} = \frac{y_0}{x_0} > \bar{y}$$

$$x_{11} = \max\left\{\frac{1}{x_6}, \frac{y_6}{x_6}\right\} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{11} = \max\left\{\frac{1}{y_6}, \frac{x_6}{y_6}\right\} = \frac{x_{-4}}{y_{-4}} < \bar{y}$$

$$x_{12} = \max\left\{\frac{1}{x_7}, \frac{y_7}{x_7}\right\} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{12} = \max\left\{\frac{1}{y_7}, \frac{x_7}{y_7}\right\} = \frac{x_{-3}}{y_{-3}} < \bar{y}$$

$$x_{13} = \max\left\{\frac{1}{x_8}, \frac{y_8}{x_8}\right\} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{13} = \max\left\{\frac{1}{y_8}, \frac{x_8}{y_8}\right\} = \frac{x_{-2}}{y_{-2}} < \bar{y}$$

$$x_{14} = \max\left\{\frac{1}{x_9}, \frac{y_9}{x_9}\right\} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{14} = \max\left\{\frac{1}{y_9}, \frac{x_9}{y_9}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} < \bar{y}$$

$$x_{15} = \max\left\{\frac{1}{x_{10}}, \frac{y_{10}}{x_{10}}\right\} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \bar{x}$$

$$y_{15} = \max\left\{\frac{1}{y_{10}}, \frac{x_{10}}{y_{10}}\right\} = \frac{x_0}{y_0} < \bar{y}$$

.

.

.

n = 0 için doğrudur. n = k için doğru olduğunu kabul edelim.

$$x_{10k+1} = \left(\frac{1}{x_{-4}}\right)^{f(2k+1)}; x_{1kn+2} = \left(\frac{1}{x_{-3}}\right)^{f(2k+1)}; x_{10k+3} = \left(\frac{1}{x_{-2}}\right)^{f(2k+1)}; x_{10k+4} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{f(2k+1)};$$

$$x_{10k+5} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{f(2k+1)}; x_{10k+6} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+1)}; x_{10k+7} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+1)}; x_{10k+8} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+1)};$$

$$x_{10k+9} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+1)}; x_{10k+10} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+1)}$$

$$y_{10k+1}=\left(\frac{1}{y_{-4}}\right)^{f(2k)};y_{10k+2}=\left(\frac{1}{y_{-3}}\right)^{f(2k)};y_{10k+3}=\left(\frac{1}{y_{-2}}\right)^{f(2k)};y_{10k+4}=\left(\frac{1}{y_{-1}}\right)^{f(2k)};$$

$$y_{10k+5}=\left(\frac{1}{y_{0}}\right)^{f(2k)};y_{10k+6}=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)};y_{10k+7}=\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)};y_{10k+8}=\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)};$$

$$y_{10k+9}=\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)};y_{10k+10}=\left(\frac{y_{0}}{x_{0}}\right)^{f(2k+2)}$$

n = k+1 için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{10k+11}=\max\left\{\frac{1}{x_{10k+6}},\frac{y_{10k+6}}{x_{10k+6}}\right\}=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+1)},\frac{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+1)}}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+1)},\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+1)}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+1)},\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+11}=\max\left\{\frac{1}{y_{10k+6}},\frac{x_{10k+6}}{y_{10k+6}}\right\}=\max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\frac{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+1)}}{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+1)}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$=\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}$$

$$x_{10k+12} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+7}}, \frac{y_{10k+7}}{x_{10k+7}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+1)}, \frac{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+1)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+1)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+1)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+1)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+12} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+7}}, \frac{x_{10k+7}}{y_{10k+7}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+1)}}{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+1)}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}$$

$$x_{10k+13} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+8}}, \frac{y_{10k+8}}{x_{10k+8}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+1)}, \frac{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+1)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+1)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+1)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+1)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+13} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+8}}, \frac{x_{10k+8}}{y_{10k+8}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+1)}}{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+1)}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}$$

$$x_{10k+14} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+9}}, \frac{y_{10k+9}}{x_{10k+9}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+1)}, \frac{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+1)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+1)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+1)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+1)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+14} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+9}}, \frac{x_{10k+9}}{y_{10k+9}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+1)}}{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+1)}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}$$

$$x_{10k+15} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+10}}, \frac{y_{10k+8}}{x_{10k+10}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+1)}, \frac{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+1)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+1)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+15} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+10}}, \frac{x_{10k+10}}{y_{10k+10}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+1)}}{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+1)}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}$$

$$x_{10k+16}=\max\left\{\frac{1}{x_{10k+11}},\frac{y_{10k+11}}{x_{10k+11}}\right\}=\max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)},\frac{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)},\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)},\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$=\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+16}=\max\left\{\frac{1}{y_{10k+11}},\frac{x_{10k+11}}{y_{10k+11}}\right\}=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\frac{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+2)},\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$=\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$x_{10k+17} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+12}}, \frac{y_{10k+12}}{x_{10k+12}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+17} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+12}}, \frac{x_{10k+12}}{y_{10k+12}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$x_{10k+18} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+13}}, \frac{y_{10k+13}}{x_{10k+13}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+18} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+13}}, \frac{x_{10k+13}}{y_{10k+13}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$x_{10k+19} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+14}}, \frac{y_{10k+14}}{x_{10k+14}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+3)}$$

$$\mathrm{y}_{10k+19} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+14}}, \frac{x_{10k+14}}{y_{10k+14}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2k+4)}$$

$$x_{10k+20} = \max\left\{\frac{1}{x_{10k+15}}, \frac{y_{10k+15}}{x_{10k+15}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}, \frac{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}}{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}, \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+3)}$$

$$y_{10k+20} = \max\left\{\frac{1}{y_{10k+15}}, \frac{x_{10k+15}}{y_{10k+15}}\right\} = \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \frac{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}}{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2k+2)}}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+3)}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+2)}, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}\right\}$$

$$= \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2k+4)}$$

Böylece teoeremin doğruluğu ispatlanmış oldu.

Teorem 3 :

(3.1) denklem sistemi, $1 < x_{-4} < y_{-4}$, $1 < x_{-3} < y_{-3}$, $1 < x_{-2} < y_{-2}$, $1 < x_{-1} < y_{-1}$ ve $1 < x_0 < y_0$ başlangıç şartlarına göre

a)
$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+1} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+2} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+3} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+4} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+5} = \infty;$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+6} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+7} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+8} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+9} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+10} = 0$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+1} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+2} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+3} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+4} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+5} = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+6} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+7} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+8} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+9} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+10} = \infty$$

olur.

İspat: a)

$x_{-4} < y_{-4}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-3} < y_{-3}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-2} < y_{-2}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-1} < y_{-1}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_0 < y_0$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-4} < y_{-4}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-3} < y_{-3}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-2} < y_{-2}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-1} < y_{-1}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+9} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_0 < y_0$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+10} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

b)

$x_{-4} < y_{-4}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-3} < y_{-3}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-2} < y_{-2}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-1} < y_{-1}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{0} < y_{0}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{0}}{y_{0}}\right)^{\infty} = 0$$

elde edilir.

$x_{-4} < y_{-4}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+3)} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-3} < y_{-3}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+3)} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-2} < y_{-2}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2n+3)} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_{-1} < y_{-1}$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+9} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2n+3)} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_0 < y_0$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+10} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n+3)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$x_0 < y_0$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{4n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n+3)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

Teorem 4 (3.1) denklem sistemi $0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$, $0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$, $0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$, $0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ ve $0 < x_0 < y_0 < 1$ başlangıç şartlarına göre

c)
$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+1} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+2} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+3} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+4} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+5} = \infty;$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+6} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+7} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+8} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+9} = 0;\ \lim_{n\to\infty} x_{10n+10} = 0$$

d)
$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+1} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+2} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+3} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+4} = 0;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+5} = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+6} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+7} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+8} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+9} = \infty;\ \lim_{n\to\infty} y_{10n+10} = \infty$$

olur.

İspat:

c)

$0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{-4}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{1}{x_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{1}{x_{-4}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{-3}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{1}{x_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{1}{x_{-3}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{-2}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{1}{x_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{1}{x_{-2}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$0 < x_0 < y_0 < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_0}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{\infty} = \infty$$

elde edilir.

$0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{\infty} = 0 \quad ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{\infty} = 0 \quad ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{\infty} = 0 \ ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+9} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{\infty} = 0 \ ,$$

elde edilir.

$0 < x_0 < y_0 < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} x_{10n+10} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2n+1)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\infty} = 0 \ .$$

elde edilir.

d)

$0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(2n)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-4}}{y_{-4}}\right)^{\infty} = 0 \ ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(2n)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-3}}{y_{-3}}\right)^{\infty} = 0 \ ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(2n)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-2}}{y_{-2}}\right)^{\infty} = 0 \quad ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(2n)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^{\infty} = 0 \quad ,$$

elde edilir.

$0 < x_0 < y_0 < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(2n)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\infty} = 0,$$

elde edilir.

$0 < x_{-4} < y_{-4} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-4}}{x_{-4}}\right)^{\infty} = \infty \quad ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-3} < y_{-3} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-3}}{x_{-3}}\right)^{\infty} = \infty \quad ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-2} < y_{-2} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-2}}{x_{-2}}\right)^{\infty} = \infty \ ,$$

elde edilir.

$0 < x_{-1} < y_{-1} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+9} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_{-1}}{x_{-1}}\right)^{\infty} = \infty \ ,$$

elde edilir.

$0 < x_0 < y_0 < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} y_{10n+10} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(2n+2)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{f(\infty)} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\infty} = \infty \ .$$

elde edilir.

ÖRNEK 1.

$X_{-4} = 2$, $X_{-3} = 3$, $X_{-2} = 4$, $X_{-1} = 5$, $X_0 = 6$,

$Y_{-4} = 8$, $Y_{-3} = 9$, $Y_{-2} = 12$, Y_{-1} , $= 15$, Y_0 , $= 18$ başlangıç şartları kabul edersek

$X_1 = 4$ $\qquad$ $Y_1 = 0{,}25$

$X_2 = 3$ $\qquad$ $Y_2 = 0{,}3333333$

$X_3 = 3$ $Y_3 = 0{,}3333333$

$X_4 = 3$ $Y_4 = 0{,}3333333$

$X_5 = 3$ $Y_5 = 0{,}3333333$

$X_6 = 0{,}25$ $Y_6 = 16$

$X_7 = 0{,}3333333$ $Y_7 = 9$

$X_8 = 0{,}3333333$ $Y_8 = 9$

$X_9 = 0{,}3333333$ $Y_9 = 9$

$X_{10} = 0{,}3333333$ $Y_{10} = 9$

$X_{11} = 64$ $Y_{11} = 0{,}0625$

$X_{12} = 27$ $Y_{12} = 0{,}1111111$

$X_{13} = 27$ $Y_{13} = 0{,}1111111$

$X_{14} = 27$ $Y_{14} = 0{,}1111111$

$X_{15} = 27$ $Y_{15} = 0{,}1111111$

$X_{16} = 0{,}015625$ $Y_{16} = 1024$

$X_{17} = 0{,}0370370370$ $Y_{17} = 243$

$X_{18} = 0{,}0370370370$ $Y_{18} = 243$

$X_{19} = 0{,}0370370370$ $Y_{19} = 243$

$X_{20} = 0{,}0370370370$ $Y_{20} = 243$

$X_{21} = 65526$ $Y_{21} = 0{,}000976562500$

$X_{22} = 6561$ $Y_{22} = 0{,}00411522633$

$X_{23} = 6561$ $Y_{23} = 0{,}00411522633$

$X_{24} = 6561$ $Y_{24} = 0{,}00411522633$

$X_{25} = 6561$ $Y_{25} = 0{,}00411522633$

$X_{26} = 0{,}0000152587890$ $Y_{26} = 6{,}710886410^{7}$

$X_{27} := 0{,}000152415790$ $Y_{27} := 1{,}59432300210^{6}$

$X_{28} := 0{,}000152415790$ $Y_{28} := 1{,}59432300210^{6}$

$X_{29} := 0{,}000152415790$ $Y_{29} = 1{,}59432300210^{6}$

$X_{30} = 0{,}000152415790$ $Y_{30} = 1{,}59432300210^{6}$

$X_{31} = 4{,}39804651210$ $Y_{31} = 1{,}49011611910$

$X_{32} = 1{,}04603532310^{10}$ $Y_{32} = 6{,}272254736110^{-7}$

$X_{33} = 1{,}04603532310^{10}$ $Y_{33} = 6{,}272254736110^{-7}$

$X_{34} = 1{,}04603532310^{10}$ $Y_{34} = 6{,}272254736110^{-7}$

$X_{35} = 1{,}04603532310^{10}$ $Y_{35} = 6{,}272254736110^{-7}$

$X_{36} = 2{,}27373675410^{-13}$ $Y_{36} = 2{,}95147905310^{20}$

$X_{37} = 9{,}55990661110^{-11}$ $Y_{37} = 1{,}66771817610^{16}$

$X_{38} = 9{,}55990661110^{-11}$ $Y_{38} = 1{,}66771817610^{16}$

$X_{39} = 9{,}55990661110^{-11}$ $Y_{39} = 1{,}66771817610^{16}$

$X_{40} = 9{,}55990661110^{-11}$ $Y_{40} = 1{,}66771817610^{16}$

$X_{41} = 1{,}29807421510^{33}$ $Y_{41} = 3{,}38813178810^{16}$

. .

. .

. .

elde edilir.

ÖRNEK 2.

$X_{-4} = 8$, $X_{-3} = 9$, $X_{-2} = 12$, $X_{-1} = 15$, $X_0 = 18$,

$Y_{-4} = 2$, $Y_{-3} = 3$, $Y_{-2} = 4$, $Y_{-1} = 5$, $Y_0 = 6$ başlangıç şartları kabul edersek

$X_1 = 0{,}25$ $Y_1 = 4$

$X_2 = 0{,}3333333$ $Y_2 = 3$

$X_3 = 0{,}3333333$ $Y_3 = 3$

$X_4 = 0{,}3333333$ $Y_4 = 3$

$X_5 = 0{,}3333333$ $Y_5 = 3$

$X_6 = 16$ $Y_6 = 0{,}25$

$X_7 = 9$ $Y_7 = 0{,}3333333$

$X_8 = 9$ $Y_8 = 0{,}3333333$

$X_9 = 9$ $Y_9 = 0{,}3333333$

$X_{10} = 9$ $Y_{10} = 0{,}3333333$

$X_{11} = 0{,}0625$ $Y_{11} = 64$

$X_{12} = 0{,}1111111$ $Y_{12} = 7$

$X_{13} = 0{,}1111111$ $Y_{13} = 7$

$X_{14} = 0{,}1111111$ $Y_{14} = 7$

$X_{15} = 0{,}1111111$ $Y_{15} = 7$

$X_{16} = 1024$ $Y_{16} = 0{,}015625$

$X_{17} = 243$ $Y_{17} = 0{,}0370370370$

$X_{18} = 243$ $Y_{18} = 0{,}0370370370$

$X_{19} = 243$ $Y_{19} = 0{,}0370370370$

$X_{21} = 0{,}000976562500$ $Y_{21} = 65536$

$X_{22} = 0{,}00411522633$ $Y_{22} = 6561$

$X_{23} = 0{,}00411522633$ $Y_{23} = 6561$

$X_{24} = 0{,}00411522633$ $Y_{24} = 6561$

$X_{25} = 0{,}00411522633$ $Y_{25} = 6561$

$X_{26} = 6{,}710886410^{7}$ $Y_{26} = 0{,}0000152587890$

$X_{27} = 1{,}59432300210^{6}$ $Y_{27} = 0{,}000152415790$

$X_{28} = 1{,}59432300210^{6}$ $Y_{28} := 0{,}000152415790$

$X_{29} = 1{,}59432300210^{6}$ $Y_{29} = 0{,}000152415790$

$X_{30} = 1{,}59432300210^{6}$ $Y_{30} = 0{,}000152415790$

$X_{31} = 1{,}49011611910^{-8}$ $Y_{31} = 4{,}39804651210^{12}$

$X_{32} = 6{,}27225473610^{-7}$ $Y_{32} = 1{,}04603532310^{10}$

$X_{33} = 6{,}27225473610^{-7}$ $Y_{33} = 1{,}04603532310^{10}$

$X_{34} = 6{,}27225473610^{-7}$ $Y_{34} = 1{,}04603532310^{10}$

$X_{35} = 6{,}27225473610^{-7}$ $Y_{35} = 1{,}04603532310^{10}$

$X_{36} = 2{,}95147905310^{20}$ $Y_{36} = 2{,}27373675410^{-13}$

$X_{37} = 1{,}66771817610^{16}$ $Y_{37} = 9{,}55990661110^{-11}$

$X_{38} = 1{,}66771817610^{16}$ $Y_{38} = 9{,}55990661110^{-11}$

$X_{39} = 1{,}66771817610^{16}$ $Y_{39} = 9{,}55990661110^{-11}$

$X_{40} = 1{,}66771817610^{16}$ $Y_{40} = 9{,}55990661110^{-11}$

$X_{41} = 3{,}38813178810^{-21}$ $Y_{41} = 1{,}29807421510^{33}$

. .

. .

. .

elde edilir.

ÖRNEK 3.

$X_{-4} = 0{,}2$, $X_{-3} = 0{,}3$, $X_{-2} = 0{,}4$, $X_{-1} = 0{,}5$, $X_0 = 0{,}6$,

$Y_{-4} = 0{,}8$, $Y_{-3} = 0{,}9$, $Y_{-2} = 0{,}8$, $Y_{-1} = 0{,}9$, $Y_0 = 0{,}9$ başlangıç şartları kabul edersek

$X_1 = 5$ $Y_1 = 1{,}25$

$X_2 = 3{,}3333333$ $Y_2 = 1{,}11111111$

$X_3 = 2{,}5$ $Y_3 = 1{,}25$

$X_4 = 2$ $Y_4 = 1{,}11111111$

$X_5 = 1{,}6666666$ $Y_5 = 1{,}11111111$

X_6 0,25 $Y_6 = 4$

$X_7 = 3{,}3333333$ $Y_7 = 3$

$X_8 = 0{,}5$ $Y_8 = 2$

$X_9 = 0{,}5555555$ $Y_9 = 1{,}8$

$X_{10} = 0{,}6666666$ $Y_{10} = 1{,}5$

$X_{11} = 16$ $Y_{11} = 0{,}25$

$X_{12} = 9$ $Y_{12} = 0{,}33333333$

$X_{13} = 4$ $Y_{13} = 0{,}5$

$X_{14} = 3{,}240$ $Y_{14} = 0{,}55555555$

$X_{15} = 2{,}250$ $Y_{15} = 0{,}66666666$

$X_{16} = 0{,}0625$ $Y_{16} = 16$

$X_{17} = 0{,}1111111$ $Y_{17} = 27$

$X_{18} = 0{,}25$ $Y_{18} = 8$

$X_{19} = 0{,}08641975$ $Y_{19} = 5{,}832$

$X_{20} = 0{,}44444444$ $Y_{20} = 3{,}375$

$X_{21} = 1024$ $Y_{21} = 0{,}015625$

$X_{22} = 243$ $Y_{22} = 0{,}0370370370$

$X_{23} = 32$ $Y_{23} = 0{,}125$

$X_{24} = 18{,}8956800$ $Y_{24} = 0{,}171467764$

$X_{25} = 7{,}59375000$ $Y_{25} = 0{,}296296296$

$X_{26} = 0{,}000976562500$ $Y_{26} = 665536$

$X_{27} = 0{,}00411522633$ $Y_{27} = 6561$

$X_{28} = 0{,}03125$ $Y_{28} = 256$

$X_{29} = 0{,}0529221494$ $Y_{29} = 110{,}199605$

$X_{30} = 0{,}131687242$ $Y_{30} = 25.6289062$

$X_{31} = 6{,}710886410^{7}$ $Y_{31} = 0{,}0000152587890$

$X_{32} = 1{,}59432300210^{6}$ $Y_{32} = 0{,}000152415790$

$X_{33} = 8192$ $Y_{33} = 0{,}00390625000$

$X_{34} = 2082{,}29648$ $Y_{34} = 0{,}00907444263$

$X_{35} = 194{,}619507$ $Y_{35} = 0{,}0390184422$

$X_{36} = 1{,}49011611910^{-8}$ $Y_{36} = 4{,}39804651210^{12}$

$X_{37} = 6{,}27225473610^{-7}$ $Y_{37} = 1{,}04603532310^{10}$

$X_{38} = 0{,}000122070312$ $Y_{38} = 2{,}09715210^{6}$

$X_{39} = 0{,}000480239008$ $Y_{39} = 2{,}29468251610^{5}$

$X_{40} = 0{,}00513823107$ $Y_{40} = 4987{,}88511$

$X_{41} = 2{,}95147905310^{20}$ $Y_{41} = 2{,}27373675410^{-13}$

. .

. .

. .

elde edilir.

ÖRNEK 4.

$X_{-4} = 0{,}8$, $X_{-3} = 0{,}9$, $X_{-2} = 0{,}8$, $X_{-1} = 0{,}9$, $X_0 = 0{,}7$,

$Y_{-4} = 0{,}2$, $Y_{-3} = 0{,}3$, $Y_{-2} = 0{,}4$, $Y_{-1} = 0{,}5$, $Y_0 = 0{,}6$ başlangıç şartları kabul edersek

$X_1 = 1{,}25$ $Y_1 = 5$

$X_1 = 1{,}1111111$ $Y_2 = 3{,}3333333$

$X_3 = 1{,}25$ $Y_3 = 2{,}5$

$X_4 = 1{,}11111$ $Y_4 = 2$

$X_4 = 1{,}11111$ $Y_4 = 2$

$X_5 = 1{,}4428571429$ $Y_5 = 1{,}6666666$

$X_6 = 4$ $Y_6 = 0{,}25$

$X_7 = 3$ $Y_7 = 0{,}3333333$

$X_8 = 2$ $Y_8 = 0{,}5$

$X_9 = 1{,}8$ $Y_9\ 0{,}55555555$

$X_{10} = 1{,}16666666$ $Y_{10} = 0{,}857142857$

$X_{11} = 0{,}25$ $Y_{11} = 16$

$X_{12} = 0{,}3333333$ $Y_{12} = 9$

$X_{13} = 0{,}5$ $Y_{13} = 4$

$X_{14} = 0{,}5555555$ $Y_{14} = 3{,}24$

$X_{15} = 0{,}857142856$ $Y_{15} = 1{,}36111111$

$X_{16} = 64$ $Y_{16} = 0{,}0625$

$X_{17} = 27$ $Y_{17} = 0{,}1111111$

$X_{18} = 18$ $Y_{18} = 0{,}25$

$X_{19} = 5{,}832$ $Y_{19} = 0{,}308641975$

$X_{20} = 1{,}58796296$ $Y_{20} = 0{,}734693877$

$X_{21} = 0{,}015625$ $Y_{21} = 1024$

$X_{22} = 0{,}0370370370$ $Y_{22} = 243$

$X_{23} = 0{,}125$ $Y_{23} = 32$

$X_{24} = 0{,}171467764$ $Y_{24} = 18{,}89568$

$X_{25} = 0{,}629737609$ $Y_{25} = 2{,}16139403$

$X_{26} = 65536$ $Y_{26} = 0{,}000976562500$

$X_{27} = 6561$ $Y_{27} = 0{,}00411522633$

$X_{28} = 256$ $Y_{28} = 0{,}03125$

$X_{29} = 110{,}199605$ $Y_{29} = 0{,}0529221494$

$X_{30} = 3{,}43221367$ $Y_{30} = 0{,}462664366$

$X_{31} = 0{,}0000152587890$ $Y_{31} = 6{,}710886410^{7}$

$X_{32} = 0{,}000152415790$ $Y_{32} = 1{,}59432300210^{6}$

$X_{33} = 0{,}00390625000$ $Y_{33} = 8192$

$X_{34} = 0{,}00907444263$ $Y_{34} = 2082{,}29648$

$X_{35} = 0{,}291357151$ $Y_{35} = 7{,}41836615$

$X_{36} = 4{,}39804651210^{12}$ $Y_{36} = 1{,}49011611910^{-8}$

$X_{37} = 1{,}04603532310^{10}$ $Y_{37} = 6{,}27225473610^{-7}$

$X_{38} = 2{,}09715210^{6}$ $Y_{38} = 0{,}000122070312$

$X_{39} = 2{,}294682516105$ $Y_{39} = 0{,}000480239008$

$X_{40} = 2{,}09715210^{6}$ $Y_{40} = 0{,}000122070312$

$X_{40} = 25{,}4614177$ $Y_{40} = 0{,}134800571$

$X_{41} = 2{,}27373675410^{-13}$ $Y_{41} = 2{,}95147905310^{20}$

. .

. .

. .

elde edilir.

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $x_{-4};x_{-3};x_{-2};x_{-1};x_0;y_{-4};y_{-3};y_{-2};y_{-1};y_0$ başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_{n-4}},\frac{y_{n-4}}{x_{n-4}}\right\};y_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{y_{n-4}},\frac{x_{n-4}}{y_{n-4}}\right\}$ maksimumlu fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Bu fark denklem sisteminde katsayılar değiştirilerek yeni maksimumlu fark denklem sistemleri oluşturulabilir. Oluşturulacak yeni maksimumulu fark denklem sisteminin çözüm davranışları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Amleh A. M., Hoag J. and Ladas G. ‘‘A Difference Equation With Eventualy Periodic Solutions’’, Comput. Math. Appl., 36(10-12), 401-404, 1998.

[2] Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., ‘‘Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$,’’, Journal of Difference Equations and Applications, 3, 297-310, 1998.

[3] Valicenti, S., ‘‘Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations’’, University of Rhode Island, (PhD Thesis), 1999

[4] Teixeria, C. T., ‘‘Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations’’, University of Rhode Island, (PhD Thesis), 2000,

[5] Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V., ‘‘On a max difference equation’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 258, 258-268, 2001.

[6] Mishev D. P. and Patula W. T., ‘‘A Reciprocal Difference Equation With Maximum’’, Comput. Math. Appl., 43, 1021-1026, 2002.

[7] Voulov, H. D.,‘‘On the periodic character of some difference equations’’, Journal of Difference Equations and Applications, 8, 799-810, 2002.

[8] Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., ‘‘Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation’’, Journal of Computational Analysis and Applications, 5, 2, 237-247, 2003.

[9] Feuer, J., ‘‘Periodic solutions of the Lyness max equation’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 147-160, 2003.

[10] Patula, W. T. and Voulov, H. D., ‘‘On a max type recursive relation with periodic coefficients’’, Journal of Difference Equations and Applications, 10, 3, 329-338, 2004.

[11] Cinar C., Stevic S. and Yalcinkaya I. ‘‘On The Positive Solutions Of A Reciprocal Difference Equation With Minumum’’, J. Appl. Math. Computing, 17, 307-314, 2005.

[12] Simsek, D., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., ‘‘On the solution of the difference equation $x_{n+1} = \max\left\{ 1/x_{n-1}, x_{n-1} \right\}$’’, Int. J. Math. Sci., 1, 10, 481-487, 2006.

[13] Yan, X., Liao, X. and Li, C., ‘‘On a difference equation with maximum’’, Applied Mathematics and Computation, 181, 1-5, 2006.

[14] Simsek, D., ‘‘ Bazı Fark Denklemlerinin Çözümleri ve Periyodikliği Üzerine Bir Çalışma’’, Doktora Tezi, 2007.

[15] Simsek D., Demir B. and Cinar C., ‘‘On the Solutions of the System of Difference Equations x{n+1}=max{A/x{n},y{n}/x{n}}, y{n+1}=max{A/y{n},x{n}/y{n}}, Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2009, Article ID 325296, 11 pages, 2009.

[16] Simsek, D., Demir B. and Kurbanlı A.S., ‘‘x{n+1}=max{1/(x{n},y{n}/x{n}}; y{n+1}=max{1/y{n},x{n}/y{n}} Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine’’, Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 28, 91-104, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı:	Burak OĞUL
Uyruğu:	Türk
Doğum Tarihi ve Yeri:	10.07.1990 Türkiye-Elazığ
Medeni Durumu:	Bekar
Tel:	+996 (550) 100439
Fax:	-
email:	ogulburak19@gmail.com
Yazışma Adresi:	

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü.	……..
Lisans	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü.	2013
Lise	Avcılar Süleyman Nazif Lisesi	2007

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2014-	Kırgızistan-Türkiye Manas Ü.	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİL

Kırgızca
Rusça