Магистрдик диссертация Даярдаган: Мелисбек ГАППАРОВ Математика багыты 2015

KIRGIZİSTAN - TÜRKİYE
"MANAS" ÜNİVERSİTESİ

**КЫРГЫЗ – ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ**
**ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ**
**МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ**

# ФРЕДГОЛЬМ - СТИЛЬТЬЕСТИН II ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

**Даярдаган**
**Мелисбек ГАППАРОВ**

**Жетекчиси**
**Ф. м. и. док., профессор Авыт АСАНОВ**

**Магистрдик диссертация**

**Июнь 2015**
**КЫРГЫЗСТАН/БИШКЕК**

**КЫРГЫЗ – ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ**
**ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ**
**МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ**

# ФРЕДГОЛЬМ - СТИЛЬТЬЕСТИН II ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

**Даярдаган**
**Мелисбек ГАППАРОВ**

**Жетекчиси**
**Ф. м. и. док., профессор Авыт АСАНОВ**

**Магистрдик диссертация**

**Июнь 2015**

**КЫРГЫЗСТАН / БИШКЕК**

## ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Бул иште бардык тиешелүү илимий маалыматтар академикалык жана этикалык эрежелерге туура келгенин жана техникалык маселесинин көрсөтүлгөнүн билдирем. Темага байланыштуу материалдар каралып жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетем жана жыйынтык изилденгенин билдирүү менен сунуштайм.

Аты – жөнү: Мелисбек ГАППАРОВ

Колу:

# BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Melisbek GAPPAROV

İmza:

# ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган Эйлердин методу менен жакындаштырып чыгаруу” аттуу магистрдик иш, Кыргыз – Түрк “Манас” Университетинин магистрдик иш мыйзамдарынын жана магистрдик иш жазма куралдарынын чегинде жазылды.

Даярдаган:

Мелисбек ГАППАРОВ

Колу:

Илимий жетекчиси:

Ф.м.и. док., профессор Авыт АСАНОВ

Колу:

Математика багытынын мүдүрү

Ф.м.и. док., профессор Авыт АСАНОВ

Колу:

# YÖNERGEYE UYGUNLULUK

“Fredgolm-Stieltjesin II.mertebedeki lineer integral denklemlerin genelleştirilen Euler’in yöntemi ile yaklaşık hesaplama” adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

| | |
|---|---|
| Tezi hazırlayan | Danışman |
| Melisbek GAPPAROV | Prof. Dr. Avıt Asanov |
| İmza: | İmza: |

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Avıt Asanov

İmza:

Ф. м. и. док., профессор Авыт АСАНОВ жетекчилигинде Мелисбек Гаппаров тарабынан даярдалган “Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган Эйлердин методу менен жакындаштырып чыгаруу” аттуу темада магистрдик иш комиссия тарабынан Кыргыз – Түрк “Манас” Университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдик иш болуп кабыл алынды.

……….. /…… / ………..

**Комиссия:**

| | | |
|---|---|---|
| Илимий жетекчиси | : Ф.м.и. док., профессор Авыт Асанов | ………. |
| Төрагасы | : Ф.м.и. док., профессор Мураталы Джаманбаев | …..…. |
| Мүчө | : Ф.м.и. док., профессор Асан Өмүралиев | ...……. |
| Мүчө | : Доц. М.А. док. Ахмет Доган | ………. |
| Мүчө | : Доц. док. Дагыстан Шимшек | ...……. |

ЧЕЧИМ :

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин …………… датасында жана …………… санындагы чечими менен бекитилди.

………. /……../ ………

Проф. Док. Зафер ГӨНҮЛАЛАН

Институт мүдүрү

Prof. Dr. Avıt ASANOV danışmanlığında Melisbek GAPPAROV tarafından hazırlanan "Fredgolm - Stieltjes'in II.mertebedeki lineer integral denklemlerin genelleştirilen Euler'in metodu ile yaklaşık hesaplama" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

……….. /…… / ………..

**JÜRİ:**

| | | |
|---|---|---|
| Danışman | : Prof. Dr. Avıt ASANOV | ……………. |
| Üye | : Prof. Dr. Muratalı DCAMANBAEV | ……………. |
| Üye | : Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİEV | ……………. |
| Üye | : Yar. Doç. Dr. Ahmet DOĞAN | ……………. |
| Üye | : Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK | ……………. |

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ………...… tarih ve …………..…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………. /……../ ………

Prof. Dr. Zafer GÖNÜLALAN

Enstitü Müdürü

# АННОТАЦИЯ

## ФРЕДГОЛЬМ – СТИЛЬТЬЕСТИН II ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ.

**Мелисбек Гаппаров**

**Кыргыз – Түрк «Манас» Университети, Табигый илимдер институту**

**Магистрдик диссертация, июнь 2015**

**Илимий жетекчиси: Авыт Асанов**

Математикалык эсептерде же математика колдонулган көп жерлерде берилген функциялардын туундуларын алуу же интегралдык теңдемелерди эсептөө методдору бар. Бирок бул функциялардын туундуларын алуу же болбосо интегралдык теңдемелерди эсептөө абдан татаал болгон учурлар болот, кээде болсо мүмкүн болбогон учурлар да болот. Мындай учурларда башка бир функцияга карата туунду алынганда туундулары бар экендиги көрсөтүлөт. Мындай туунду алуу Стильтьес интегралынын тескери операциясы экендиги көрсөтүлөт. Бирок бул Стильтьес интегралынын чыгарылышы ар дайым бар экендиги билинсе дагы, муну эсептөө ар дайым мүмкүн болбойт. Ошондуктан интегралдык теңдемелерди жакындаштырып эсептөө методдору колдонулат. Мисалы, Эйлер Римандын интегралын жакындаштырып эсептөө методун сунуш кылган. Ал эми сандык анализде Эйлердин бул методу Фредгольмдун II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жакындаштырып чыгарууда колдонулган [11], [12], [13].

Бул диссертациялык иште Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган Эйлердин методу менен жакындаштырып чыгаруу мүмкүн экендигин көрсөтөбүз. Албетте, жакындаштырып эсептөөнүн так чыгарылышынан айырмасы болот, ушул катасын кантип табуу жана кандай шарттар коюлуш керектиги көрсөтүлөт.

Алгач, биринчи башка бир өсүүчү үзгүлтүксүз функцияга карата туунду алуунун аныктамасы жана бул туунду алуунун кээ бир теоремалары каралды [1]. Кийин, бул туунду алуунун тескери функциясы болгон Стильтьестин интегралынын теоремалары жана далилдөөлөрү көрсөтүлдү [3]. Экинчи бөлүмдө Стильтьес интегралында жалпыланган Эйлердин методунун колдонулушу көрсөтүлдү жана теоремалардын далилдөөлөрүнүн негизинде ката формуласы табылды. Үчүнчү бөлүмдө Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин аныктамалары берилди [5], [6], [7]. Эйлер методунун аныктамасы менен бирге бул методдун жакындаштырып эсептөө методдорунан жалпыланган Эйлер методунун Фредгольм – Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерине да колдонууга болоору көрсөтүлдү.

**Ачкыч сөздөр:** Туунду, Стильтьестин интегралы, Эйлер методу, жалпыланаган Эйлердин методу, Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелери.

# ÖZET

## FREDGOLM-STİELTJESİN'İN II.MERTEBEDEN LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLEN EULER'İN METODU İLE YAKLAŞIK HESAPLAMA

**Melisbek GAPPAROV**
**Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2015**
**Danışman: Prof. Dr. Avıt ASANOV**

Matematiksel hesapların yada Uygulamalı Matematiğin birçok bölümünde türev alma veya integral denklemlerinin hesaplamaları mevcuttur. Bunların birçoğunun türevlerinin bulunması veya integral denklemlerinin çözülmesi oldukça zordur, bazen de imkansızdır. Bu durumda böyle fonksiyonların, türevi başka bir artan ve sürekli bir fonksiyona göre alındığında, türevlenebilir olduğu görülmektedir. Bu başka bir fonksiyona göre türev alma Stieltjes'in integralidir. Birçok integral denklemlerinin çözümü Stieltjes integraliyle çıkması bu metodun önemini arzediyor. Ama bu Stieltjes integralini her zaman çözülebilir olduğu bilinse de, çözümünü bulmak zor hatta bazı durumlarda imkansız olabilir. Bu durumda sayısal yaklaşım metodlarının kullanılması kaçınılmaz oluyor. Mesela, Euler, Riemanın integralin yaklaşık hesaplama metodu ile hesaplanabilir olduğunu göstermiştir. Euler'in bu metod'u nümerik analizde Fredgolmun II.mertebedeki lineer integral denklelerini yaklaşık hesaplamalarda kullanılmıştır [11], [12], [13].

Bizim çalışmada Fredgolm-Stieltjes'in II.mertebedeki lineer integral denklemlerinin yaklaşık değerini bulmada genelleştirilen Euler'in metodunun uygulanabilir olduğu görülmektedir. Sayısal yaklaşım metodu olması itibariyle, doğal olarak ortaya çıkacak hata payının hesaplanması ve koyulacak şartları da kapsamaktadır.

Birinci bölümde, başka bir fonksiyona göre türevin tanımı ve bazı teoremler ele alındı [1]. Sonra bu tür türev almanın tersi olan Stieltjes integralinin teoremleri ve ispatlamaları gösterilmiştir [3]. İkinci bölümde ise, Stieltjes İntegralin genelleştirilen

Euler’in metod’u ile yaklaşık hesaplamarı yapıldı ve bazı teoremlerin ispatlamalarıyla hata payı bulunmuştur. Üçüncü bölümde ise, Fredgolm-Stieltjes’in II.mertebedeki lineer integral denklemlerinin tanımı yapıldı [5], [6], [7]. Euler metodunun tanımı ve Euler metodu Fredgolm-Stieltjes’in II.mertebedeki lineer integral denklemlerinde uygulanabilir olduğu gösterildi.

**Anahtar Sözcükler:** Türev, Stieltjes İntegrali, Euler Metodu, Genelleştirilen Euler’in Metodu, Fredgolm-Stieltjes’in II.mertebedeki Lineer İntegrali, Sayısal Yaklaşım Metodları.

## АННОТАЦИЯ

## ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА – СТИЛЬТЬЕСА ВТОРОГО РОДА ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

**Мелисбек Гаппаров**

**Кыргызско-Турецкий Университет «Манас», Институт Естественных наук**

**Магистерская диссертация, июнь 2015**

**Научный руководитель: Проф. Док. Авыт Асанов**

Во многих математических и научных вычислениях или же в прикладной математике нужно взять производную или интеграл какой – либо функции. Но, как известно, не все функции могут быть дифференцированы или же интегрированы. Если у какой – нибудь функции существует производная относительно другой функции, то производная может существовать. В дополнение, если первообразная относительно функции равна интегралу Стильтьеса, то можно вычислить интеграл некоторых не диференцируемых функций. Но к сожалению, даже при гарантии существования, крайне тяжело вычислить интеграл методом Стильтьеса. Это всё ведёт к методам приближения. И один из этих методов – это метод Эйлера. Например, Эйлер предложил метод приближенного вычисления интеграла Римана. Ну а в численном анализе, этот метод используется для приближенного вычисления линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода [11], [12], [13].

В этой диссертационной работе, мы попытаемся определить возможно ли использование обобщенного метода Эйлера в приближенном вычислении интегрального уравнения Фредгольма – Стильтьеса второго рода. Так как здесь используется метод приближения, то тут нужно ожидать погрешности вычисления. Так же в этой статье высчитываются все формулы и нужные условия для снижения погрешности.

Первая глава посвящена производной относительно беспрерывной и возрастающей функции. Здесь даны несколько законов производных и теорем расширения [1]. Далее, описываются теоремы и доказательства обратной функции производной Стильтьеса [3]. В следующей главе показано использование обобщенного метода Эйлера для приближенного вычисления интеграла Стильтьеса, так же показаны доказательства теорем. Далее, дано определение линейным интегральным уравнениям Фредгольма – Стильтьеса второго рода [5], [6], [7]. После фундаментальных определений показана возможность использования обобщенного метода Эйлера для приближенного вычисления линейного интегрального уравнения Фредгольма – Стильтьеса второго рода.

**Ключевые слова:** Производная, метод Эйлера, обобщенный метод Эйлера, приблеженное вычисление, интеграл Стильтьеса, линейное интегральное уравнение Фредгольма – Стильтьеса второго рода.

## ABSTRACT


**APPROXIMATE SOLUTION OF THE $2^{nd}$ KIND OF FREDHOLM-STIELTJES LINEAR INTEGRATED EQUATION BY USING THE GENERALIZED EULER'S RULE**



**Melisbek GAPPAROV**

**Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Institute of Natural and Applied Sciences**

**M.Sc. Thesis, June 2015**

**Supervisor: Prof. Dr. Avyt ASANOV**



In many parts of Mathematical and Scientific computations or in Applied Mathematics it is needed to differentiate or integrate a function. However, it is known that many functions are not differentiable and cannot be integrated. If some of these functions are differentiated with respect to another function, we can say that the derivative may exist. In addition, as an antiderivative with respect to a function that is Stieltjes integral, some of unintegrable functions can be integrated with respect to function above. Unfortunately, it is again difficult to integrate many functions by using this Stieltjes integral, even though the existence is guaranteed. This leads us to use approximation methods. One of these approximation methods is the generalized Euler`s Rule. For example, Euler offered the method of the approximate solution of Riemann integral. So, in the numerical analysis this Euler's method is used for the approximate solution of the second kind of Fredholm's lineer integrated equations [11], [12], [13].

In this work, it is tried to find whether it is possible to use this generalized Euler`s Rule in the $2^{nd}$ kind of Fredholm-Stiltjes linear integration or not. Since this is an approximation method, it can be thought immediately about the error bound in this calculation. In this paper, the Formulae and needed conditions for the error bound are also obtained.

As a preliminary section, the first section is devoted to derivative with respect to a continuous and increasing function. Here some of the differentiation rules are given [1]. Then, Stieltjes integral is defined as an antiderivative of this differentiation [3].

After these fundamental studies, one of the approximation methods the generalized Euler's Rule is defined and error bound is obtained. After the definition of the $2^{nd}$ kind of Fredholm-Stiltjes linear integrated equation is given [5], [6], [7]. Finally, it is defined that we can use the generalized Euler's Rule for the approximate solution of the $2^{nd}$ kind of Fredholm-Stiltjes linear integrated equations.

**Keywords:** Differentiation, Integral, Approximation Methods, the Euler`s Rule, the Generalized Euler's Rule, $2^{nd}$ kind of Fredholm - Stiltjes Linear Integrated Equations.

**АЛГАЧ СӨЗ / ЫРААЗЫЧЫЛЫК**

Билим алууда салымы чоң, магистрдик иштин толугу менен бүтүшүнө, сабырдуулук менен өз эмгегин жана жардамын аябаган жетекчиме, математика бөлүмүнүн башчысы урматтуу агайым физика – математика илимдеринин доктору профессор Авыт Асановго жана ушул дипломдук изилдөө ишимди жазууда баалуу кеңештерин берген агайларыма терең ыраазычылыгымды билдирем.

Айрыкча ушул изилдөө убакыт ичинде ар тараптан жардамчы болгон үй – бүлөмө чоң ыраазычылык билдирем.

Мелибек ГАППАРОВ

Бишкек, 2015

**МАЗМУНУ**

**ФРЕДГОЛЬМ – СТИЛЬТЬЕСТИН II ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ**



**БИРИНЧИ БӨЛҮМ**

**ЖАЛПЫ МААЛЫМАТ**

## ЭКИНЧИ БӨЛҮМ



## ҮЧҮНЧҮ БӨЛҮМ

**СИМВОЛДОР**

| | |
|---|---|
| $[a, b]$ | жабык интервал |
| $(a, b)$ | ачык интервал |
| $\in$ | элементи |
| $f'_{\varphi}$ | $\varphi(x)$ функциясына карата туунду |
| $\rightarrow$ | умтулганда |
| $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$ | $\varphi(x)$ функциясына карата интеглалы |

## КИРИШҮҮ

Колдонмо математикада интегралдык теңдемелрди жакындаштырып эсептөө актуалдуу болуп эсептелет. Эйлер Римандын интегралын жакындаштырып эсептөө методун сунуш кылган. Ал эми сандык анализде Эйлердин бул методу Фредгольмдун II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жакындаштырып чыгарууда колдонулган [11], [12], [13]. Ушул сыяктуу интеграл жана интегралдык тедемелерди жакындаштырып чыгаруу методдору бар. Мисалы, Стильтьестин интегралын жакындаштырып эсептөөдө жалпыланган трапеция, орто чекит, симпсон методдору сунуш кылынган [8], [9], [10].

Бул, диссертациялык иште $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)dg(s) + f(x)$ Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жакындаштырып эсептөө методдорунан жалпыланган Эйлердин методун талкуулайбыз. Эйлердин методун колдонуу үчүн интегралы алынган функция төртүнчү тартиптеги туундуга ээ болушу керек. Андан кийин бул методду колдонуп, $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)dg(s) + f(x)$ Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесин каалаган тактыкта эсептейбиз. Бул интегралдык теңдемедеги $f(x)$ функциясы $(a,b)$ интервалында үзгүлтүксүз жана $K(x,s) \in \mathrm{C}(a \leq x; s \leq b)$ интервалында үзгүлтүксүз болушу зарыл. Мында, $K(x,s) -$ ядро, $\lambda -$параметр, $f(x)$, $K(x,s) -$ белгилүү функциялар болуп эсептелет. Ал эми $\varphi(x) -$ белгисиз функция.

# 1. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯГА КАРАТА ТУУНДУ АЛУУ

## 1.1. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯГА КАРАТА ТУУНДУ АЛУУНУН АНЫКТАМАСЫ

**Аныктама 1.1.1:** $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары $(a, b)$ интервалында аныкталган жана $\varphi(x)$ функциясы $(a, b)$ интервалында үзгүлтүксүз өсүүчү болсун. Ар кандай $x \in (a, b)$ жана $\Delta x \neq 0$ үчүн $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясына карата туундусу

$$f'_{\varphi}(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}$$

болуп аныкталат [1].

**Теорема 1.1.1:** Эгерде $f(x)$ функциясынын $x_0 \epsilon (a, b)$ чекитинде $\varphi(x)$ ке крата туундусу болсо, анда $f(x)$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.

**Далилдөө:**

Эгерде $f(x)$ функциясынын $x_0 \epsilon (a, b)$ чекитинде $\varphi(x)$ ке карата туундусу болсо, анда Аныктама 1 боюнча

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} = \frac{df}{d\varphi}(x_0) = f'_\varphi(x_0)$$

Анда,

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} = f'_\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

Бул жерде $\alpha(\Delta x)$ тин мааниси абдан кичине болот $\Delta x \to 0$ го умтулганда, башкача айтканда

$$\Delta f(x_0) = f'_\varphi(x_0)\Delta\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta\varphi(x_0)$$

Анда $\Delta x \to 0$ го умтулганда

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$$

Бул дегени, $f(x)$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.

## 1.2. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯГА КАРАТА ТУУНДУ АЛУУНУН КЭЭ БИР ТУУНДУ АЛУУ ФОРМУЛАЛАРЫ:

1) $(c)'_\varphi = 0$,
2) $(u+v)'_\varphi = u'_\varphi + v'_\varphi$
3) $(u\cdot v)'_\varphi = u'_\varphi\cdot v + u\cdot v'_\varphi$
4) $\left(\frac{u}{v}\right)'_\varphi = \frac{u'_\varphi\cdot v - u\cdot v'_\varphi}{v^2}$
5) $u(x)$ функциясы $\varphi(x)$ ке карата $x = x_0$ чекитинде туундуга ээ болсун жана $u(x_0) = u_0$, $u'_\varphi(x_0) = \alpha$ болсун, $f(u)$ функциясы $u = u_0$ чекитинде туундуга ээ болсун жана $f'(u_0) = \beta$. Анда, $v(x) = f\big(u(x)\big)$ функциясы $\varphi(x)$ ке карата $x = x_0$ чекитинде туундуга ээ болот, мында

$$v'_\varphi(x) = f'(u_0)\cdot u'_\varphi(x_0) = \beta\cdot\alpha$$

## 1.3. СТИЛТЬЕСТИН ИНТЕГРАЛЫ

**Теорема 1.3.1:** $f(x)$ функциясы [a,b] кесиндисинде үзгүлтүксүз жана $\varphi(x)$ функциясы [a,b] кесиндисинде үзгүлтүксүз өсүүчү болсун жана

$$F = \int_a^x f(t) \cdot d\varphi(t) \qquad x \in [a,b]$$

анда,

$$F'_\varphi(x) = \left( \int_a^x f(t) \cdot d\varphi(t) \right)'_\varphi = f(x), \quad x \in [a,b]$$

мында,

$$F'_\varphi(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\varphi(a+\Delta x) - \varphi(a)}$$

жана

$$F'_\varphi(b) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{F(b+\Delta x) - F(b)}{\varphi(b+\Delta x) - \varphi(b)}$$

**Далилдөө:** Туунду алуунун аныктамасы боюнча

$$F'_\varphi(x) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left( f(x) \int_x^{x+\Delta x} d\varphi(t) - \int_x^{x+\Delta x} \big(f(x) - f(t)\big) d\varphi(t) \right)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}$$
$$= f(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \psi(x, \Delta x)$$

мында,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \psi(x, \Delta x) = \frac{\int_x^{x+\Delta x} \big(f(x) - f(t)\big) d\varphi(t)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}$$

$\varphi(x)$ функциясы $[\square, b]$ кесиндисинде өсүүчү болгондуктан

$$|\psi(x,\Delta x)| \leq \frac{\omega_f(\Delta x)\int_x^{x+\Delta x} d\varphi(t)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)} = \omega_f(\Delta x)$$

Бул жерде,

$$\omega_f(\delta) = \underset{|t-x|\leq\delta}{\boldsymbol{sup}} |f(x)-f(t)|$$

$\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta) = 0$ экендиги ачык, анда

$$\lim_{\Delta x\to 0}|\psi(x,\Delta x)| \leq \lim_{\Delta x\to 0}\omega_f(|\Delta x|) = 0$$

Демек, $F'_\varphi(x) = f(x)$

**Лемма 1.3.1:**

$F_0(x) = f(x) \in C[a,b]$ аныкталган болсун жана $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз өсүүчү функция болсун жана

$$F_i(x) = \int_a^x F_{i-1}(t)d\varphi(t), \;\; x\epsilon[a,b], \;\; i = 1,\dots,n.$$

Анда, $F_n(x) \in C_\varphi^{(n)}[a,b]$

Мында, $C_\varphi^{(n)}[a,b]$ $[a,b]$ – кесиндисинде аныкталган баардык үзгүлтүксүз $v(x)$ функцияларынын сызыктуу мейкиндиги болуп эсептелет да $v_\varphi^{(n)}(x) \in C[a,b]$ болот.

# 2. ЭЙЛЕР МЕТОДУ, ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУНУН СТИЛТЬЕСТИН ИНТЕГРАЛЫНДА КОЛДОНУЛУШУ

## 2.1. ЭЙЛЕР МЕТОДУ

$\int_a^b f(x)dx$ интегралын Эйлер жакындаштыруу методу менен эсептейбиз.

$[a, b]$ кесиндисин $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ түрүндө n бөлүккө тең бөлөлү, анда ар бир кадам

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih, \ \ x_i = x_{i-1} + h, \qquad i = 0,1,2 \dots, n, \qquad n \in N$$

болот.

$$F = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] \tag{1}$$

Бул трапеция формуласы, бул жөнөкөй квадратур формуласы деп да аталат. Эми мунун каталыгын табабыз. Каталыгын табыш үчүн $f(x)$ функциясын Тейлор формуласына ажыратып, жазып алабыз.

Анда,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \tfrac{1}{2}(x - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) + \cdots \tag{2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(a + b)$$

Эми (2)ни (1)ге койуп, трапеция формуласынын каталыгын алабыз.

$$R_{\text{трап}} = \int_a^b f(x)dx - (b-a)[f(a)+f(b)] \approx -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\bar{x}) \tag{3}$$

Эми $f''(\bar{x})$ ти биринчи туунду менен туйундуруп алсак, анда

$$R_{\text{трап}} \approx -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\bar{x}) \approx \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)] \tag{4}$$

болот. Эми (4)түн оң жагына трапеция формуласын кошуп, Эйлер методун алабыз. Б.а.

$$F \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)] \tag{5}$$

(5) - Эйлер формуласы [2], [4]. Анда,

$$M_i = \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})[f(x_{i-1})+f(x_i)] + \frac{1}{12}(x_i - x_{i-1})^2[f'(x_{i-1}) - f'(x_i)] \tag{6}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} M_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)](x_i - x_{i-1}) +$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}[f'(x_{i-1})-f'(x_i)](x_i - x_{i-1})^2 \tag{7}$$

$x_i - x_{i-1} = h = \dfrac{b-a}{n}$ болгондугунан

$$A = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)] + \frac{h^2}{12}\sum_{i=1}^{n}[f'(x_{i-1})-f'(x_i)] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)] + \frac{(b-a)^2}{n}\sum_{i=1}^{n}[f'(x_{i-1})-f'(x_i)] \tag{8}$$

Демек,

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right) + \frac{1}{12}h^2(f_0' - f_N') \tag{9}$$

## 2.2. СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛЫНДА ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУНУН КОЛДОНУЛУШУ

$[a,b]$ кесиндисин $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ түрүндө n бөлүккө тең бөлөлү, анда ар бир кадам

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih, \ \ x_i = x_{i-1} + h, \qquad i = 0,1,2 \dots, n, \qquad n \in N$$

болот.

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i, \qquad I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d\varphi(x), \tag{1}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big) +$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}\left[f'_\varphi(x_{i-1}) - f'_\varphi(x_i)\right](\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))^2 \tag{2}$$

**Теорема 2.2.1:** $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары (a,b) интервалында аныкталган жана $\varphi(x)$ функциясы (a,b) интервалында үзгүлтүксүз өсүүчү болсун жана $f_\varphi^{(4)}(x) \in$ $\mathrm{C}[a,b]$ жашасын. Анда,

$$|I - A_n| \le \frac{M}{720}\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)(\omega(h))^4 \tag{3}$$

Мында,

$$\begin{cases} M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| \\ \omega(h) = \sup\limits_{|x-y|\le h} |\varphi(x) - \varphi(y)| \end{cases} \tag{4}$$

**Далилдөө:**

$$\begin{cases} I_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d\varphi(x) \\ P_i = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i-1})]\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big), \ \ i = 1,2,..,n \end{cases} \tag{5}$$

$$a_i = -\frac{1}{2}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big), \quad b_i = -\frac{1}{8}\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)^2, \quad i = 1,2,..,n \tag{6}$$

$x = t + x_{i-1}$ деп белгилөө жүргүзсөк, анда

$$I_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d\varphi(x) = \int\limits_0^h f(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = f(t + x_{i-1}) & dv = d\varphi(t + x_{i-1}) \\ du = f'_\varphi(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) & v = \varphi(t + x_{i-1}) + a_i \end{vmatrix} =$$

$$= f(t + x_{i-1})[\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]|_0^h -$$

$$-\int\limits_0^h f'_\varphi(t + x_{i-1})[\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]d\varphi(t + x_{i-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = f'_\varphi(t + x_{i-1}) & dv = [\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]d\varphi(t + x_{i-1}) \\ du = f''_\varphi(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) & v = \left[\frac{[\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]^2}{2} + b_i\right] \end{vmatrix} =$$

$$= f(t + x_{i-1})[\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]|_0^h - f'_\varphi(t + x_{i-1})\left[\frac{[\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]^2}{2} + b_i\right]\Bigg|_0^h +$$

$$+\int\limits_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})\left[\frac{[\varphi(t + x_{i-1}) + a_i]^2}{2} + b_i\right]d\varphi(t + x_{i-1}) \tag{7}$$

Эми (6)ны эске алып, (7)ден төмөнкүнү алабыз:

$$I_i = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i-1})] \cdot [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] + \int\limits_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})B(t)d\varphi(t + x_{i-1})$$

$$= P_i + R_i(h), \;\; i = 1,2,..,n \tag{8}$$

Мында,

$$P_i = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i-1})]\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)$$

$$R_i(h) = \int_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})B(t)d\varphi(t + x_{i-1})$$

$$B(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(t + x_{i-1}) - \frac{1}{2}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big)\Big]^2 - \frac{1}{8}\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)^2 \tag{9}$$

$$\overline{R}_i(h) = R_i(h) - \alpha_i\left(f'_\varphi(x_{i-1}) - f'_\varphi(x_i)\right) = R_i(h) + \alpha_i \int_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) =$$

$$= \int_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})B(t)d\varphi(t + x_{i-1}) + \alpha_i \int_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) =$$

$$= \int_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})[B(t) + \alpha_i]d\varphi(t + x_{i-1}) \tag{10}$$

Мында,

$$B(t) = \frac{1}{2}\big[\varphi^2(t + x_{i-1}) - \varphi(t + x_{i-1})\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1})\big] \tag{11}$$

Эми (10)дон:

$$\frac{1}{2}\int_0^h f''_\varphi(t + x_{i-1})\big[\varphi^2(t + x_{i-1}) - \varphi(t + x_{i-1})\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1})$$
$$+ \alpha_i\big]d\varphi(t + x_{i-1}) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = f''_\varphi(t + x_{i-1}) \\ du = f'''_\varphi(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) \\ dv = \begin{bmatrix} \varphi^2(t + x_{i-1}) - \varphi(t + x_{i-1})\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \\ +\varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1}) + \alpha_i \end{bmatrix} d\varphi(t + x_{i-1}) \\ v = \begin{bmatrix} \dfrac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{3} - \dfrac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \\ \varphi(t + x_{i-1})(\varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1}) + \alpha_i) + \beta_i \end{bmatrix} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} f_{\varphi}''(t + x_{i-1}) \left[ \begin{matrix} \dfrac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{3} - \dfrac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \\ +\varphi(t + x_{i-1})(\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \alpha_i) + \beta_i \end{matrix} \right] \Bigg|_0^h -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^h f_{\varphi}'''(t + x_{i-1}) \left[ \frac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{3} - \frac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) \right.$$

$$\left. + \varphi(t + x_{i-1})(\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \alpha_i) + \beta_i \right] d\varphi(t + x_{i-1}) \qquad (12)$$

$$\frac{1}{2} f_{\varphi}''(x_i) \left[ \frac{\varphi^3(x_i)}{3} - \frac{\varphi^2(x_i)}{2} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \varphi(x_i)[\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \alpha_i] + \beta_i \right]$$

$$- \frac{1}{2} f_{\varphi}''(x_{i-1}) \left[ \frac{\varphi^3(x_{i-1})}{3} - \frac{\varphi^2(x_{i-1})}{2} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) \right.$$

$$\left. + \varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \alpha_i] + \beta_i \right] = 0$$

$$\frac{\varphi^3(x_i) - \varphi^3(x_{i-1})}{3} - \frac{\varphi^2(x_i) - \varphi^2(x_{i-1})}{2} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big)$$

$$+ \big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \alpha_i\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big) = 0$$

$$\alpha_i = -\frac{1}{3} [\varphi^2(x_i) + \varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \varphi^2(x_{i-1})] + \frac{1}{2} [\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})]^2$$

$$- \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) =$$

$$= -\frac{1}{3} \varphi^2(x_i) - \frac{1}{3} \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) - \frac{1}{3} \varphi^2(x_{i-1}) + \frac{1}{2} \varphi^2(x_i) + \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi^2(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) = \frac{1}{6} [\varphi^2(x_i) + \varphi^2(x_{i-1})] - -\frac{1}{3} \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\alpha_i = \frac{1}{6} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 \qquad (13)$$

$$\frac{\varphi^3(x_i)}{3} - \frac{\varphi^2(x_i)}{2} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \varphi(x_i) \left[ \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 \right]$$

$$+ \beta_i = 0$$

$$\beta_i = -\frac{\varphi^3(x_i)}{3} + \frac{\varphi^2(x_i)}{2}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big)$$

$$- \varphi(x_i)\left[\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6}[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2\right] =$$

$$= -\frac{\varphi^3(x_i)}{3} + \frac{\varphi^3(x_i)}{2} + \frac{\varphi^2(x_i)\varphi(x_{i-1})}{2} - \varphi^2(x_i)\varphi(x_{i-1}) - \frac{\varphi^3(x_i)}{6} +$$

$$+ \frac{\varphi^2(x_i)\varphi(x_{i-1})}{3} - \frac{\varphi(x_i)\varphi^2(x_{i-1})}{6} = -\frac{1}{6}\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})]$$

$$\beta_i = -\frac{1}{6}\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] \tag{14}$$

Табылган $\alpha_i$, $\beta_i$ лерди эске алып (12) – формуладан төмөнкүнү алабыз:

$$-\frac{1}{2}\int_0^h f_\varphi'''(t + x_{i-1})\Bigg[\frac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{3} - \frac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big)$$

$$+ \varphi(t + x_{i-1})\left[\varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6}[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2\right]$$

$$-\frac{1}{6}\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})]\Bigg] d\varphi(t + x_{i-1}) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = f_\varphi'''(t + x_{i-1}) \\ du = f_\varphi^{(4)}(t + x_{i-1})d\varphi(t + x_{i-1}) \\ dv = \left[\begin{array}{c} \frac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{3} - \frac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) \\ +\varphi(t + x_{i-1})\left[\varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6}[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2\right] \\ -\frac{1}{6}\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] \end{array}\right] d\varphi(t + x_{i-1}) \\ v = \left[\begin{array}{c} \frac{\varphi^4(t + x_{i-1})}{12} - \frac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{6}\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) \\ + \frac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2}\left[\varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6}[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2\right] \\ -\frac{1}{6}\varphi(t + x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] + \gamma_i \end{array}\right] \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{2} f_{\varphi}'''(t + x_{i-1}) \left[ \frac{\varphi^4(t + x_{i-1})}{12} - \frac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{6} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) \right.$$
$$+ \frac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2} \left[ \varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 \right]$$
$$\left. \left. - \frac{1}{6} \varphi(t + x_{i-1}) \varphi(x_i) \varphi(x_{i-1}) [\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] + \gamma_i \right] \right|_0^h +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^h f_{\varphi}^{(4)}(t + x_{i-1}) \left[ \frac{\varphi^4(t + x_{i-1})}{12} - \frac{\varphi^3(t + x_{i-1})}{6} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) \right.$$
$$+ \frac{\varphi^2(t + x_{i-1})}{2} \left[ \varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 \right]$$
$$\left. - \frac{1}{6} \varphi(t + x_{i-1}) \varphi(x_i) \varphi(x_{i-1}) [\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] + \gamma_i \right] d\varphi(t$$
$$+ x_{i-1}) \tag{15}$$

$$- \frac{1}{2} f_{\varphi}'''(x_i) \left[ \frac{\varphi^4(x_i)}{12} - \frac{\varphi^3(\square_i)}{6} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \frac{\varphi^2(x_i)}{2} \varphi(x_i) \varphi(x_{i-1}) \right.$$
$$+ \frac{\varphi^2(x_i)}{12} \cdot [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 - \frac{1}{6} \varphi^2(x_i) \varphi(x_{i-1}) [\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})]$$
$$\left. + \gamma_i \right]$$

$$+ \frac{1}{2} f_{\varphi}'''(x_{i-1}) \left[ \frac{\varphi^4(x_{i-1})}{12} - \frac{\varphi^3(x_{i-1})}{6} \big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + \frac{\varphi^2(x_{i-1})}{2} \varphi(x_i) \varphi(x_{i-1}) \right.$$
$$+ \frac{\varphi^2(x_{i-1})}{12} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 - \frac{1}{6} \varphi(x_i) \varphi^2(x_{i-1}) [\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})]$$
$$\left. + \gamma_i \right] = 0$$

Мындан,

$$\frac{\varphi^4(x_i)}{12} - \frac{\varphi^4(x_i)}{6} - \frac{\varphi^3(x_i)\varphi(x_{i-1})}{6} + \frac{\varphi^3(x_i)\varphi(x_{i-1})}{2} + \frac{\varphi^4(x_i)}{12} - \frac{\varphi^3(x_i)\varphi(x_{i-1})}{6} +$$

$$+ \frac{\varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})}{12} - \frac{\varphi^3(x_i)\varphi(x_{i-1})}{6} - \frac{\varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})}{6} + \gamma_i = 0$$

$$\gamma_i = \frac{\varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})}{12} \tag{16}$$

Эми табылган $\gamma_i$ ни эске алып, (15)тен төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{1}{2}\int_0^h f_\varphi^{(4)}(t+x_{i-1})\left[\frac{\varphi^4(t+x_{i-1})}{12} - \frac{\varphi^3(t+x_{i-1})}{6}\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big)\right.$$
$$+\frac{\varphi^2(t+x_{i-1})}{2}\left[\varphi(x_i)\cdot\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{6}[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]^2\right]$$
$$-\frac{1}{6}\varphi(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})]$$
$$\left.+\frac{\varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})}{12}\right]d\varphi(t+x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^h f_\varphi^{(4)}(t+x_{i-1})\big[\varphi^4(t+x_{i-1}) - 2\varphi^3(t+x_{i-1})\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big)$$
$$+6\varphi^2(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \varphi^2(t+x_{i-1})[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]^2$$
$$-2\varphi(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})] + \varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})\big]\,d\varphi(t+x_{i-1})$$
$$=$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^h f_\varphi^{(4)}(t+x_{i-1})K_i(t)\,d\varphi(t+x_{i-1}) = \tag{17}$$

Мында,

$$K_i(t) = [\varphi(t+x_{i-1})-\varphi(x_i)]^2\cdot[\varphi(t+x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})]^2 = \tag{18}$$

Жогорудагы (18)ден төмөнкү келип чыгарын алабыз

$$K_i(0)=0, \qquad K_i(h)=0, \;\; K_i(t)>0 \tag{19}$$

Ар кандай $t\in[0,h]$, $i=1,2,\dots,n$. Анда,

$$|K_i(t)| = K_i(t), \qquad \forall\, t\in[0,h], \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{20}$$

болот.

(17)ден:

$$|E_M| \leq \frac{1}{24}\int_0^h \left|\square_\varphi^{(4)}(t+x_{i-1})\right|$$

$$\cdot \left|\left[\varphi^4(t+x_{i-1}) - 2\varphi^3(t+x_{i-1})\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big) \right.\right.$$
$$+ 6\varphi^2(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \varphi^2(t+x_{i-1})[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]^2$$
$$- 2\varphi(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})]$$
$$\left.\left. + \varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})\right]\right| d\varphi(t+x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \frac{M}{24}\int_0^h \left|\varphi^2(t+x_{i-1})\big[\varphi^2(t+x_{i-1}) - 2\varphi(t+x_{i-1})\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big)\right.$$
$$+ 2\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})\big]$$
$$\left. + \big[\varphi(t+x_{i-1})\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big) - \varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})\big]^2\right| d\varphi(t+x_{i-1})$$

$$\leq \frac{M}{24}\int_0^{\text{p}} |[\varphi(t+x_{i-1})-\varphi(x_i)]^2 \cdot [\varphi(t+x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})]^2|\, d\varphi(t+x_{i-1}) =$$

$$= \frac{M}{24}\int_0^h \left[\varphi^4(t+x_{i-1}) - 2\varphi^3(t+x_{i-1})\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big)\right.$$
$$+ 6\varphi^2(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \varphi^2(t+x_{i-1})[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]^2$$
$$- 2\varphi(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) \cdot [\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})]$$
$$\left. + \varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})\right] d\varphi(t+x_{i-1}) =$$

$$= \frac{M}{24}\left\{\frac{\varphi^5(t+x_{i-1})}{5} - \frac{\varphi^4(t+x_{i-1})}{2}\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})\big)\right.$$
$$+ 2\varphi^3(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(\square_{i-1}) + \frac{\varphi^3(t+x_{i-1})}{3}[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]^2$$
$$- \varphi^2(t+x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})$$
$$\left.\left. \cdot [\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1}) + \varphi(t+x_{i-1})\varphi^2(x_i)\varphi^2(x_{i-1})]\right\}\right|_0^h =$$

$$= \frac{M}{24}\left\{\left[\frac{1}{5}\varphi^5(x_i) - \frac{1}{2}\varphi^4(x_i)\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big) + 2\varphi^3(x_i)\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1})\right.\right.$$

$$+ \frac{1}{3}\varphi^3(x_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2 - \varphi^3(x_i)\varphi(x_{i-1})[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})]$$

$$\left. + \varphi^3(x_i)\varphi^2(x_{i-1})\right]$$

$$- \left[\left[\frac{1}{5}\varphi^5(x_{i-1}) - \frac{1}{2}\varphi^4(x_{i-1})\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})\big)\right.\right.$$

$$+ 2\varphi^3(x_{i-1})\varphi(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{3}\varphi^3(x_{i-1})[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]^2$$

$$\left.\left.\left. - \varphi^3(x_{i-1})\varphi(x_i)[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})] + \varphi^2(x_i)\varphi^3(x_{i-1})\right]\right]\right\} =$$

$$= \frac{M}{24}\left\{\left[\frac{1}{5}\varphi^5(x_i) - \frac{1}{2}\varphi^5(x_i) - \frac{1}{2}\varphi^4(x_i)\varphi(x_{i-1}) + 2\varphi^4(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{3}\varphi^5(x_i)\right.\right.$$

$$- \frac{2}{3}\varphi^4(x_i)\varphi(x_{i-1}) + \frac{1}{3}\varphi^3(x_i)\varphi^2(x_{i-1}) - \varphi^4(x_i)\varphi(x_{i-1})$$

$$\left. - \varphi^3(x_i)\varphi^2(x_{i-1}) + \varphi^3(x_i)\varphi^2(x_{i-1})\right]$$

$$- \left[\frac{1}{5}\varphi^5(x_{i-1}) - \frac{1}{2}\varphi^5(x_{i-1}) - \frac{1}{2}\varphi(x_i)\varphi^4(x_{i-1}) + 2\varphi(x_i)\varphi^4(x_{i-1})\right.$$

$$+ \frac{1}{3}\varphi^5(x_{i-1}) - \frac{2}{3}\varphi(x_i)\varphi^4(x_{i-1}) + \frac{1}{3}\varphi^2(x_i)\varphi^3(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\varphi^4(x_{i-1})$$

$$\left.\left. - \varphi^2(x_i)\varphi^3(x_{i-1}) + \varphi^2(x_i)\varphi^3(x_{i-1})\right]\right\} =$$

$$= \frac{M}{24}\left\{\frac{1}{30}[\varphi^5(x_i) - 5\varphi^4(x_i)\varphi(x_{i-1}) + 10\varphi^3(x_i)\varphi^2(x_{i-1})]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{30}[\varphi^5(x_{i-1}) - 5\varphi(x_i)\varphi^4(x_{i-1}) + 10\varphi^2(x_i)\varphi^3(x_{i-1})]\right\} =$$

$$= \frac{M}{720}\{\varphi^5(x_i) - 5\varphi^4(x_i)\varphi(x_{i-1}) + 10\varphi^3(x_i)\varphi^2(x_{i-1}) - \varphi^5(x_{i-1})$$

$$+ 5\varphi(x_i)\varphi^4(x_{i-1}) - 10\varphi^2(x_i)\varphi^3(x_{i-1})\}$$

$$= \frac{M}{720}\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)^5 \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{21}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n}\Big(A_i + \overline{R}_i(h)\Big) = \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{R}_i(h) = A_n + \sum_{i=1}^{n}\overline{R}_i(h) \Rightarrow$$

$$|I - A_n| = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i(h) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{720}\Big(\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)\Big)^5 \leq$$

$$\leq \frac{M}{720}\sum_{i=1}^{n}\big(\omega(h)\big)^4\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big) = \frac{M}{720}\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)\big(\omega(h)\big)^4$$

Демек, жалпыланган Эйлер методу боюнча:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right)$$
$$+ \frac{1}{12}\big(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\big)^2(f_0' - f_N') + E_M$$

Мында,

$$E_M = \frac{M}{720}\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)(\omega(h))^4$$

# 3. ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИ

Фредгольмдун сызыктуу теңдемелери биринчи түрдөгү сызыктуу теңдемелер жана экинчи түрдөгү сызыктуу теңдемелерге классификацияланат.

## 3.1.ФРЕДГОЛЬМДУН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИ

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

Бул теңдемедеги максат-берилген $K(x,s) -$ ядросунун үзгүлтүксүз функциясында жана $\varphi(x) -$ функцияларында $f(s) -$ функциясын табуу.

## 3.2. ФРЕДГОЛЬМДУН ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Фредгольмдун экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы төмөнкү формула менен аныкталат.

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad x \in [a,b] \qquad (1)$$

Мында, $\varphi(x) - n \times n$ – өлчөмдүү белгисиз функция, $K(x,s) - n \times n$ – өлчөмдүү белгилүү матрица функция жана $f(x) - n \times n$ – өлчөмдүү белгилүү вектор функция, $\lambda$ – параметрт.

$f(x)$ функциясы $(a,b)$ интервалында үзгүлтүксүз жана $K(x,s) \in \mathrm{C}(a \leq x; s \leq b)$ интервалында үзгүлтүксүз функциялар, $K(x,s)$ – интегралдык теңдеменин ядросу деп аталат.

Эгерде $f(x) \neq 0$, анда (1)-теңдеме **бир тектүү эмес** деп аталат, ал эми $f(x) = 0$ болсо, анда (1)-теңдеме төмөнкү формулага келет жана **бир тектүү** болот.

$$v(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)v(s)ds \qquad x \in [a,b] \qquad (2)$$

Ал эми төмөнкү система:

$$v(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s)v(s)ds + g(x), \qquad x \in [a,b] \qquad (3)$$

$$v(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s)v(s)ds, \qquad x \in [a,b] \qquad (4)$$

Мында, $K^*(x,s) - n \times n$ – өлчөмдүү матрица $K(x,s)$ матрицасынын түйүндөшү.

**Мисалы:**

$\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} = \lambda \int_a^b \begin{bmatrix} x^2 s & xs \\ x - s & x^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \end{bmatrix} ds$ үчүн

$K(x,s) = \begin{bmatrix} x^2 s & xs \\ x - s & x^2 - s^2 \end{bmatrix}$ $\qquad K^*(x,s) = \begin{bmatrix} s^2 x & s - x \\ sx & s^2 - x^2 \end{bmatrix}$ болот.

Биз $\|K(x,s)\| \in C(G)$, $G = [a,b] \times [a,b]$, $\|f(x)\|, \|f(x)\| \in C[a,b] \Leftrightarrow$ $f(x), g(x) \in C_n[a,b]$.

**Теорема 3.2.1:**

Эгерде (2) – система $C_n[a,b]$ да нөлдүк гана чыгарылышка ээ болсо, анда (4) – система да $C_n[a,b]$ мейкиндигинде нөлдүк гана чыгарылышка ээ болот.

Бул учурда $\forall\, f(x) \in C_n[a,b]$ үчүн (1) – система $C_n[a,b]$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ жана ал чыгарылыш

$$\varphi(x) = \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds + f(x), \qquad x \in [a,b] \tag{5}$$

формуласы менен табылат. Мында $R(x,s,\lambda) - n \times n$ – өлчөмдүү матрица функция, $\lambda\, K(x,s)$ –матрица ядронун матрица резольвентасы деп аталат жана $R(x,s,\lambda)$ –төмөнкү формула менен аныкталат.

$$R(x,s,\lambda) = \lambda\, K(x,s) + \int_a^b \lambda\, K(x,\tau) R(\tau,s,\lambda) ds, \tag{6}$$

Бул учурда, $\forall\, g(x) \in C_n[a,b]$ үчүн (3) – система дагы $C_n[a,b]$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ.

**Теорема 3.2.2:**

Эгерде бир тектүү (2) система $C_n[a,b]$ мейкиндигинде сызыктуу көз каранды эмес $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ чыгарылышка ээ болсо, анда бир тектүү (4) – система дагы $C_n[a,b]$ мейкиндигинде сызыктуу көз каранды эмес $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ чыгарылышка ээ. Мында, $\lambda$ саны $K(x,s)$ матрица (ядро) мүнөздөгүч сан болот.

- Бул учурда бир тектүү эмес (1) – система $C_n[a,b]$ мейкиндигинде чыгарылышка ээ качан гана $f(x) \in C_n[a,b]$ жана

  $$< f(x), \psi_i(x) > \int_a^b \left[ \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \psi_{ij}(x) \right] dx = 0$$

  болсо. Мында

$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\right)^T$, $\psi_i(x) = \left(\psi_{i1}(x), \psi_{i2}(x), \dots, \psi_{in}(x)\right)^T$

Ал эми (1) – системанынжалпы чыгарылышы

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \varphi_i(x)\,; \quad x \in [a,b] \tag{7}$$

Формула менен табылат. Мында, $\varphi_0(x) \in C_n[a,b]$ функциясы (1) – системанын кандайдыр бир чыгарылышы, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ −каалаган турактуу сандар.

- Бул учурда бир тектүү эмес (3) – ситема $C_n[a,b]$ мейкиндигинде чыгарылышкаа ээ качан гана $g(x) \in C_n[a,b]$ жана $\forall\, i\ \in (1,2,\dots,m)$ үчүн $< g(x), \varphi_i(x) >= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\varphi_{ij}(x)\right] dx = 0$ болсо. Мында,

  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))^T$, $\varphi_i(x) = \left(\varphi_{i1}(x), \varphi_{i2}(x), \dots, \varphi_{in}(\square)\right)^T$.

  Бул учурда (3) – системанын жалпы чыгарылышы

$$v(x) = v_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \psi_i(x)\,, \qquad x \in [a,b] \tag{8}$$

формуласы менен табылат. Мында, $v_0(x) \in C_n[a,b]$ функциясы (3) – системанын кандайдыр бир чыгарылышы, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ −каалаган турактуу сандар.

**Айрым учур:**

$$K(x,s) = \sum_{j=1}^{p} A_j(x) B_j(s)\,, \qquad p \in N \tag{9}$$

болсун. Мында, $A(x),\ B(x) - n \times n$ −өлчөмдүү матрица функция. Бул учурда (1) – сисема

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} A_j(x) \int_a^b B_j(s)\varphi(s)ds + f(x), \qquad x \in [a,b] \tag{10}$$

түрүндө жазылат. Эми

$$c_i = \int_a^b B_i(s)\varphi(s)ds, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{11}$$

белгилөөсүн киргизсек, анда (10) дон:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} A_j(x) \cdot c_i + f(x), \qquad x \in [a,b] \tag{12}$$

болот. Мында, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$ – n өлчөмдүү белгисиз векторлор.

Эми (12)→(11) ге коебуз.

$$c_i = \int_a^b B_i(s) \left[ \lambda \sum_{j=1}^{p} A_j(x) \cdot c_j + f(x) \right] ds$$

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^{p} \left[ \int_a^b B_i(s) \cdot A_j(s) ds \right] c_j + \int_a^b B_i(s) \cdot f(s) ds, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{13}$$

Эми төмөнкү белгилөөлөрдү киргизели.

$$M_{ij} = \int_a^b B_i(s) \cdot A_j(s) ds, \quad F_i = \int_a^b B_i(s) \cdot f(s) ds, \quad i,j = 1,2,\dots,p$$

Анда (13)тү:

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\, c_j + F_i, \quad i = 1,2,\dots,p \tag{14}$$

алабыз. Бул сызыктуу алгебралык теңдемлер системасы.

## 3.3. ФРЕДГОЛЬМ - СТИЛЬТЬЕСТИН II ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНДЕ ЖАЛПЫЛАНГАН ЭЙЛЕРДИН МЕТОДУНУН КОЛДОНУЛУШУ

Бул, диссертациялык иште $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)dg(s) + f(x)$ Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жакындаштырып эсептөө методдорунан жалпыланган Эйлер методун талкуулайбыз.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)dg(s) + f(x), \qquad x\epsilon[a,b] \tag{1}$$

$$\varphi'_{g(x)}(x) = \lambda \int_a^b K'_{g(x)}(x,s)\varphi(s)dg(s) + f'_{g(x)}(x) \tag{2}$$

$[a,b]$ кесиндисин $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n = b$ түрүндө $n$ бөлүккө тең бөлөлү, анда ар бир кадам

$$h = \frac{b-a}{n}; \ \ x_i = a + ih, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 0,1,2\ldots,n, \quad n\epsilon N$$

болот.

Эми жогоруда Стилтьестин интегралы үчүн жалпыланган Эйлердин методун колдонгондой эле Фредгольм – Стильтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси үчүн да жалпыланган Эйлердин методун колдонобуз, анда,

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i, \qquad I_i = \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,s)\varphi(s)dg(s) \tag{3}$$

$$A_n(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}[K(x,x_{j-1})\,\varphi(x_{j-1}) + K(x,x_j)\varphi(x_j)]\left(g(x_j) - g(x_{j-1})\right) +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n}\left[(K(x,s)\varphi(s))'_{g(s)}\Big|_{s=x_{j-1}} - (K(x,s)\varphi(s))'_{g(s)}\Big|_{s=x_j}\right]$$

$$\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2 \qquad (4)$$

Эми (4)-формуладагы туундуларды жазып алып, төмөнкүнү алабыз:

$$A_n(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x) = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}[K(x,x_{j-1})\,\varphi(x_{j-1}) + K(x,x_j)\varphi(x_j)]\left(g(x_j) - g(x_{j-1})\right) +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n}\left[K'_{g(s)}\left(x,x_{j-1}\right)\cdot\varphi\left(x_{j-1}\right) + K(x,x_{j-1})\cdot\varphi'_{g(s)}(x_{j-1}) - K'_{g(s)}\left(x,x_j\right)\varphi\left(x_j\right)\right.$$

$$\left. - K(x,x_j)\cdot\varphi'_{g(s)}(x_j)\right]\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2 \qquad (5)$$

Эми (5)→(1): коюп, $x = x_i$ , $s = x_j$ , $i = 0,1,2,3\ldots,n$ белгилөө киргизели, анда:

$$\varphi(x_i) = \lambda\int_a^b K(x_i,s)\,\varphi(s)dg(s) + f(x_i)$$

$$\approx \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[K\left(x_i,x_{j-1}\right)\varphi\left(x_{j-1}\right) + K\left(x_i,x_j\right)\varphi\left(x_j\right)\right]\cdot\left[g\left(x_j\right) - g\left(x_{j-1}\right)\right] +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n}\left[(K(x_i,s)\varphi(s))'_{g(s)}\Big|_{s=x_{j-1}} - (K(x_i,s)\varphi(s))'_{g(s)}\Big|_{s=x_j}\right]\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2$$

$$+ f(x_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

$$\varphi(x_i) = \lambda \int_a^b K(x_i, s)\, \varphi(s) dg(s) + f(x_i) \approx$$

$$\approx \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[ K(x_i, x_{j-1}) \varphi(x_{j-1}) + K(x_i, x_j) \varphi(x_j) \right] \cdot \left[ g(x_j) - g(x_{j-1}) \right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{12} \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \Big[ K'_{g(s)}(x_i, x_{j-1}) \varphi(x_{j-1}) + K(x_i, x_{j-1}) \varphi'_{g(s)}(x_{j-1}) - K'_{g(s)}(x_i, x_j) \varphi(x_j)$$

$$- K(x_i, x_j) \varphi'_{g(s)}(x_j) \Big] \cdot \left[ g(x_j) - g(x_{j-1}) \right]^2 \Big\} + f(x_i) \quad i = 0,1, . . , n \ (6)$$

Эми $\varphi(x_i) = \varphi_i$ , $\varphi(x_j) = \varphi_j$ , $\varphi'_{g(s)}(x_j) = \psi_j$ $j = 0,1, \dots, n$ белгилөөсүн киргизип, (6)дан төмөнүнү алабыз:

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[ K(x_i, x_{j-1}) \varphi_{j-1} + K(x_i, x_j) \varphi_j \right] \cdot \left[ g(x_j) - g(x_{j-1}) \right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{12} \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \Big[ K'_{g(s)}(x_i, x_{j-1}) \varphi_{j-1} + K(x_i, x_{j-1}) \psi_{j-1} - K'_{g(s)}(x_i, x_j) \varphi_j - K(x_i, x_j) \psi_j \Big]$$

$$\cdot \left[ g(x_j) - g(x_{j-1}) \right]^2 \Big\} + f(x_i)\,, \qquad i = 0,1, \dots, n \qquad (7)$$

Мындан (7) ден:

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=0}^{n-1} K(x_i, x_j) \cdot \left[ g(x_{j+1}) - g(x_j) \right] \cdot \varphi_j +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j) \cdot \left[ g(x_j) - g(x_{j-1}) \right] \cdot \varphi_j +$$

$$+ \frac{\lambda}{12} \sum_{j=0}^{n-1} K'_{g(s)}(x_i, x_j) \cdot \left[ g(x_{j+1}) - g(x_j) \right]^2 \cdot \varphi_j +$$

$$+ \frac{\lambda}{12} \sum_{j=0}^{n-1} K(x_i, x_j) \cdot \left[ g(x_{j+1}) - g(x_j) \right]^2 \cdot \psi_j -$$

$$-\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n} K'_{g(s)}(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_j)-g(x_{j-1})\right]^2\cdot\varphi_j -$$

$$-\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_j)-g(x_{j-1})\right]^2\cdot\psi_j + f(x_i)\,, \qquad i=0,1,\dots,n$$

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{2}\left\{K(x_i,x_0)\cdot[g(x_1)-g(x_0)] + \frac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i,x_0)\cdot[g(x_1)-g(x_0)]^2\right\}\varphi_0 +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K(x_i,x_j)\cdot\left[g(x_{j+1})-g(x_j)\right] + K(x_i,x_j)\cdot\left[g(x_j)-g(x_{j-1})\right]\right.$$

$$+\frac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i,x_j)\cdot\left[g(x_{j+1})-g(x_j)\right]^2 - \frac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i,x_j)$$

$$\left.\cdot\left[g(x_j)-g(x_{j-1})\right]^2\right\}\varphi_j +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\left\{K(x_i,x_n)\cdot[g(x_n)-g(x_{n-1})] - \frac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i,x_n)\cdot[g(x_n)-g(x_{n-1})]^2\right\}\varphi_n +$$

$$+\frac{\lambda}{12}K(x_i,x_0)\cdot[g(x_1)-g(x_0)]^2\psi_0 +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K(x_i,x_j)\cdot\left[g(x_{j+1})-g(x_j)\right]^2 - K(x_i,x_j)\cdot\left[g(x_j)-g(x_{j-1})\right]^2\right\}\psi_j -$$

$$-\frac{\lambda}{12}K(x_i,x_n)\cdot[g(x_n)-g(x_{n-1})]^2\psi_n + f(x_i)\,, \qquad i=0,1,n \tag{8}$$

Эми (1) ден $g(x)$ боюнча туунда алабыз:

$$\varphi'_{g(x)}(x) = \lambda\int_a^b K'_{g(x)}(x,s)\,\varphi(s)dg(s) + f'_{g(x)}(x) \tag{9}$$

$\varphi'_{g(x)}(x) = \lambda\int_a^b K'_{g(x)}(x,s)\,\varphi(s)dg(s)$ интегралына жалпыланган Эйлердин методун колдонобуз:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[K'_{g(x)}(x, x_{j-1})\varphi(x_{j-1}) + K'_{g(x)}(x, x_j)\varphi(x_j)\right] \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(K'_{g(x)}(x,s)\varphi(s)\right)'_{g(s)}\Big|_{s=x_{j-1}} - \left(K'_{g(x)}(x,s)\varphi(s)\right)'_{g(s)}\Big|_{s=x_j}\right\} \cdot [g(x_i) - g(x_{i-1})]^2$$

$$P_n(x) = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[K'_{g(x)}(x, x_{j-1})\varphi(x_{j-1}) + K'_{g(x)}(x, x_j)\varphi(x_j)\right] \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right] +$$

$$+ \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n}\left\{K''_{g(x)g(s)}(x, x_{j-1})\varphi(x_{j-1}) + K'_{g(x)}(x, x_{j-1})\varphi'_{g(s)}(x_{j-1}) - K''_{g(x)g(s)}(x, x_j)\varphi(x_j) - K'_{g(x)}(x, x_j)\varphi'_{g(s)}(x_j)\right\} \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2 \tag{10}$$

Эми (10) → (9) коюп, $x = x_i$ $\quad i = 0,1, \dots, n$ деп койсок.

$$\varphi'_{g(x)}(x_i) = \lambda \int_a^b K'_{g(x)}(x_i, s)\, \varphi(s) dg(s) + f'_{g(x)}(x_i) \approx$$

$$\approx \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[K'_{g(x)}(x_i, x_{j-1})\varphi(x_{j-1}) + K'_{g(x)}(x_i, x_j)\varphi(x_j)\right] \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_{j-1})\varphi(x_{j-1}) + K'_{g(x)}(x_i, x_{j-1})\varphi'_{g(s)}(x_{j-1}) - K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j)\varphi(x_j) - K'_{g(x)}(x_i, x_j)\varphi'_{g(s)}(x_j)\right] \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\} + f'_{g(x)}(x_i) \qquad i = 0,1, \dots, n \tag{11}$$

Эми $\varphi(x_j) = \varphi_j$ ; $\varphi'_{g(s)}(x_j) = \psi_j$ ; $\varphi'_{g(x)}(x_i) = \psi_i$ $i = 0,1,\dots,n$ деп белгилөөсүн киргизип, (11)ден төмөнкүнү алабыз:

$$\psi_i = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\{K'_{g(x)}(x_i, x_{j-1})\varphi_{j-1} + K'_{g(x)}(x_i, x_j)\varphi_j\} \cdot [g(x_j) - g(x_{j-1})] +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n}\Big\{\big[K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_{j-1})\varphi_{j-1} + K'_{g(x)}(x_i, x_{j-1})\psi_{j-1} - K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j)\varphi_j$$

$$- K'_{g(x)}(x_i, x_j)\psi_j\big] \cdot [g(x_j) - g(x_{j-1})]^2\Big\} + f'_{g(x)}(x_i) \qquad (12)$$

Мындан, (12)ден төмөнкүнү алабыз:

$$\psi_i = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=0}^{n-1} K'_{g(x)}(x_i, x_j) \cdot [g(x_{j+1}) - g(x_j)] \cdot \varphi_j +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n} K'_{g(x)}(x_i, x_j) \cdot [g(x_j) - g(x_{j-1})] \cdot \varphi_j +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=0}^{n-1} K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j) \cdot [g(x_{j+1}) - g(x_j)]^2 \cdot \varphi_j +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=0}^{n-1} K'_{g(x)}(x_i, x_j) \cdot [g(x_{j+1}) - g(x_j)]^2 \cdot \psi_j -$$

$$-\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n} K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j) \cdot [g(x_j) - g(x_{j-1})]^2 \cdot \varphi_j -$$

$$-\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n} K'_{g(x)}(x_i, x_j) \cdot [g(x_j) - g(x_{j-1})]^2 \cdot \psi_j + f'_{g(x)}(x_i) \qquad i = 0,1,\dots,n$$

$$\psi_i = \frac{\lambda}{2}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_0)\cdot[g(x_1) - g(x_0)] + \frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_0)\cdot[g(x_1) - g(x_0)]^2\right\}\varphi_0 +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right] + K'_{g(x)}(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]\right.$$

$$+\frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right]^2 - \frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j)$$

$$\left.\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\}\varphi_j +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_n)\cdot[g(x_n) - g(x_{n-1})] - \frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_n)\cdot[g(x_n) - g(x_{n-1})]^2\right\}\varphi_n$$

$$+\frac{\lambda}{12}K'_{g(x)}(x_i, x_0)\cdot[g(x_1) - g(x_0)]^2\cdot\psi_0 +$$

$$+\frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_j)\left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right]^2 - K'_{g(x)}(x_i, x_j)\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\}\psi_j -$$

$$-\frac{\lambda}{12}K'_{g(x)}(x_i, x_n)[g(x_n) - g(x_{n-1})]^2\psi_n + f'_{g(x)}(x_i), \qquad i = 0,1,\dots n \qquad (13)$$

Эми (8) менен (13)тү бириктирип, төмөнкүдөй алгебралык теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = A_0(x_i)\varphi(x_0) + A_{i,j}(x_i)\varphi(x_j) + \cdots + A_n(x_i)\varphi(x_n) + \\ \quad +A_{n+1}(x_i)\psi(x_0) + A_{n+2,j}(x_i)\psi(x_j) + \cdots + A_{2n+2}(x_i)\psi(x_n) + f(x_i), \\ \qquad i = 0,1,\dots,n, \qquad j = 1,2,\dots,n-1 \\ \varphi'_{g(x)}(x_i) = A'_0(x_i)\varphi(x_0) + A'_{i,j}(x_i)\varphi(x_j) + \cdots + A'_n(x_i)\varphi(x_n) + \\ \quad +A'_{n+1,j}(x_i)\psi(x_0) + A'_{n+2,j}(x_i)\psi(x_1) + \cdots + A'_{2n+2}(x_i)\psi(x_n) + f'_{g(x)}(x_i), \\ \qquad i = 0,1,\dots,n, \ \ j = 1,2,\dots,n-1 \end{cases} \qquad (14)$$

Мында,

$$A_0 = \tfrac{\lambda}{2}\left\{K(x_i, x_0)\cdot[g(x_1) - g(x_0)] + \tfrac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i, x_0)\cdot[g(x_1) - g(x_0)]^2\right\}$$

$$A_{i,j} = \tfrac{\lambda}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right] + K(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right] +\right.$$

$$\left.\tfrac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right]^2 - \tfrac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i, x_j)\cdot\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\}$$

.......

$A_n = \frac{\lambda}{2}\left\{K(x_i, x_n) \cdot [g(x_n) - g(x_{n-1})] - \frac{1}{6}K'_{g(s)}(x_i, x_n) \cdot [g(x_n) - g(x_{n-1})]^2\right\}$

$A_{n+1} = \frac{\lambda}{12}K(x_i, x_0) \cdot [g(x_1) - g(x_0)]^2$

$A_{n+2,j} = \frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K(x_i, x_j) \cdot \left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right]^2 - K(x_i, x_j) \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\}$

.........

$A_{2n+2} = \frac{\lambda}{12}K(x_i, x_n) \cdot [g(x_n) - g(x_{n-1})]^2\psi_n + f(x_i)\,, \qquad i = 0{,}1, n$

$A'_0 = \frac{\lambda}{2}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_0) \cdot [g(x_1) - g(x_0)] + \frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_0) \cdot [g(x_1) - g(x_0)]^2\right\}$

$A'_{i,j} = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_j) \cdot \left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right] + K'_{g(x)}(x_i, x_j) \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right] +\right.$
$\left.\frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j) \cdot \left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right]^2 - \frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_j) \cdot \left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\}$

..........

$A'_n = \frac{\lambda}{2}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_n) \cdot [g(x_n) - g(x_{n-1})] - \frac{1}{6}K''_{g(x)g(s)}(x_i, x_n) \cdot [g(x_n) - g(x_{n-1})]^2\right\}$

$A'_{n+1} = \frac{\lambda}{12}K'_{g(x)}(x_i, x_0) \cdot [g(x_1) - g(x_0)]^2 \cdot \psi_0$

$A'_{n+2,j} = \frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{K'_{g(x)}(x_i, x_j)\left[g(x_{j+1}) - g(x_j)\right]^2 - K'_{g(x)}(x_i, x_j)\left[g(x_j) - g(x_{j-1})\right]^2\right\}$

.........

$A'_{2n+2} = \frac{\lambda}{12}K'_{g(x)}(x_i, x_n)[g(x_n) - g(x_{n-1})]^2\psi_n + f'_{g(x)}(x_i), \qquad i = 0{,}1, \ldots n$

Эми (14)төн, $\varphi'_{g(x)}(x_i) = \psi(x_i)$:

$\varphi(x_0) = A_0(x_0)\varphi(x_0) + A_0(x_0)\varphi(x_1) + A_{i,j}(x_0)\varphi(x_j) + \cdots + A_n(x_0)\varphi(x_n) +$
$A_{n+1}(x_0)\psi(x_0) + A_{n+2,j}(x_0)\psi(x_1) + A_{n+3,j}(x_0)\psi(x_j) + \cdots + A_{2n+2}(x_0)\psi(x_n) +$
$f(x_0),\ j = \overline{2, n-1}$

$\varphi(x_1) = A_0(x_1)\varphi(x_0) + A_1(x_1)\varphi(x_1) + A_{i,j}(x_1)\varphi(x_j) + \cdots + A_n(x_1)\varphi(x_n) + A_{n+1}(x_1)\psi(x_0) + A_{n+2,j}(x_1)\psi(x_1) + A_{n+3,j}(x_1)\psi(x_j) + \cdots + A_{2n+2}(x_1)\psi(x_n) + f(x_1), j = \overline{2, n-1}$

...

$\varphi(x_n) = A_0(x_n)\varphi(x_0) + A_1(x_n)\varphi(x_1) + A_{i,j}(x_n)\varphi(x_j) + \cdots + A_n(x_n)\varphi(x_n) + A_{n+1}(x_n)\psi(x_0) + A_{n+2,j}(x_n)\psi(x_1) + A_{n+3,j}(x_n)\psi(x_j) + \cdots + A_{2n+2}(x_n)\psi(x_n) + f(x_n),\ \ j = \overline{2, n-1}$

$\psi(x_0) = A'_0(x_0)\varphi(x_0) + A'_1(x_0)\varphi(x_1) + A'_{i,j}(x_0)\varphi(x_j) + \cdots + A'_n(x_0)\varphi(x_n) + A'_{n+1,j}(x_0)\psi(x_0) + A'_{n+2,j}(x_0)\psi(x_1) + A'_{n+3,j}(x_0)\psi(x_j) + \cdots + A'_{2n+2,j}(x_0)\psi(x_n) + f'_{g(x)}(x_0),\ j = \overline{2, n-1}$

$\psi(x_1) = A'_0(x_1)\varphi(x_0) + A'_1(x_1)\varphi(x_1) + A'_{i,j}(x_1)\varphi(x_j) + \cdots + A'_n(x_1)\varphi(x_n) + A'_{n+1,j}(x_1)\psi(x_0) + A'_{n+2,j}(x_1)\psi(x_1) + A'_{n+3,j}(x_1)\psi(x_j) + \cdots + A'_{2n+2,j}(x_1)\psi(x_n) + f'_{g(x)}(x_1),\ j = \overline{2, n-1}$

…

$\psi(x_n) = A'_0(x_n)\varphi(x_0) + A'_1(x_n)\varphi(x_1) + A'_{i,j}(x_n)\varphi(x_j) + \cdots + A'_n(x_n)\varphi(x_n) + A'_{n+1,j}(x_n)\psi(x_0) + A'_{n+2,j}(x_n)\psi(x_1) + A'_{n+3,j}(x_n)\psi(x_j) + \cdots + A'_{2n+2}(x_n)\psi(x_n) + f'_{g(x)}(x_n),\ j = \overline{2, n-1}$

$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0(x_0)\varphi_0 + \cdots + A_n(x_0)\varphi_n + A_{n+1}(x_0)\psi_0 + \cdots + A_{2n+2}(x_0)\psi_n \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdots \\ \varphi_n = A_0(x_n)\varphi_0 + \cdots + A_n(x_n)\varphi_n + A_{n+1}(x_n)\psi_0 + \cdots + A_{2n+2}(x_n)\psi_n \\ \psi_0 = A'_0(x_0)\varphi_0 + \cdots + A'_n(x_n)\varphi_n + A'_{n+1}(x_0)\psi_0 + \cdots + A'_{2n+2}(x_n)\psi_n \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdots \\ \psi_n = A'_0(x_n)\varphi_0 + \cdots + A'_n(x_n)\varphi_n + A'_{n+1}(x_0)\psi_0 + \cdots + A'_{2n+2}(x_n)\psi_n \end{cases} \tag{15}$$

Бул алгебралык теңднмелер системасы, эми бул алгебралык теңдемелер системасын матрицалык түрдө жазып, белгисиз $\varphi_i, \psi_i$ лерди табабыз. Анда

$I\varphi = A\varphi + f$

$$(I - A)\varphi = f \tag{16}$$

Мында,

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & & A_{1,n+1} & A_{1,n+2} & & \cdots & A_{1,2n+2} \\ A_{21} & \cdots & & A_{2,n+1} & A_{2,n+2} & & \cdots & A_{2,2n+2} \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ A_{n+1,1} & & \cdots & A_{n+1,n+1} & A_{n+1,n+2} & \cdots & & A_{n+1,2n+2} \\ A_{n+2,1} & & \cdots & A_{n+2,n+1} & A_{n+2,n+2} & \cdots & & A_{n+2,2n+2} \\ \vdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & & \vdots \\ A_{2n+2,1} & & \cdots & A_{2n+2,n+1} & A_{2n+2,n+2} & \cdots & & A_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} - (2n+2)\times(2n+$$

2) өлчөмдүү матрица

$$\varphi=\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} - (2n+2)\times 1$$ – өлчөмдүү вектор матрица; $$f=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ \cdots \\ f(x_n) \\ f(x_{n+1}) \\ \cdots \\ f(x_{2n+2}) \end{bmatrix} -$$

$(2n+2)\times 1 -$ өлчөмдүү вектор матрица.

$I-(2n+2)\times(2n+2)-$ өлчөмдүү бирдик матрица.

$A=(a_{ij})-(2n+2)\times(2n+2)$ матрицасын төмөндөгүдөй жазып алабыз:

$0\le j\le n,\ 0\le i\le n$ үчүн $\varphi_0,\ \varphi_j,\ \varphi_n$ коэффициенттерин колдонобуз.

$n+1\le j\le 2n+2,\ n+1\le i\le 2n+2$ үчүн $\psi_0,\ \psi_j,\ \psi_n$ коэффициенттерин колдонобуз.

(15) ти матрицалык $(I-A)\varphi=f$ түрдө жазсак

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda A_0(x_0) & \ldots & -\lambda A_n(x_0) & -\lambda A_{n+1}(x_0) & \ldots & -\lambda A_{2n+2}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda A_0(x_n) & \ldots & 1-\lambda A_n(x_n) & -\lambda A_{n+1}(x_n) & \ldots & -\lambda A_{2n+2}(x_n) \\ -\lambda A_0^{'}(x_0) & \ldots & -\lambda A_n^{'}(x_0) & 1-\lambda A_{n+1}^{'}(x_0) & \ldots & -\lambda A_{2n+2}^{'}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda A_0^{'}(x_n) & \ldots & -\lambda A_n^{'}(x_n) & -\lambda A_{n+1}^{'}(x_n) & \ldots & 1-\lambda A_{2n+2}^{'}(x_n) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \ldots \\ \varphi_n \\ \psi_0 \\ \ldots \\ \psi_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0 \\ \ldots \\ f_n \\ f_{n+1} \\ \ldots \\ f_{2n+2} \end{bmatrix}$$

болот.

**Лемма 3.3.1:**

$g(x) \in C^{\alpha}[a,b]$ аныкталган болсун жана $g(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз өсүүчү болсун.

$|I - A_n| \leq M(g(b) - g(a))(w(h))^4$

Мында,

$$\begin{cases} M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |(K(x,s)\varphi(s))^4| \\ \omega(h) = \sup\limits_{\substack{|x-y| \leq h \\ x,y \in [a,b]}} |g(x) - g(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \end{cases}$$

болот.

**Мисалы:**

Бизге төмөндөгүдөй мисал берилсин, мунун чыгарылышы бар экендиги далил. Анда, ушул интегралдын чыгарылышын көрсөтөлү:

$$\varphi(x) = \int_0^1 (1+\sqrt{xs})\varphi(s)d\sqrt{s} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad (1)$$

$$K(x,s) = \left(1+\sqrt{xs}\right),\ \ f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x},\ \ g(x) = \sqrt{x}$$

$$a = 0, b = 1, n = 5, h = \frac{b-q}{n}, h = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$$

$$x_0 = 0; x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 0{,}6;\ x_4 = 0{,}8;\ x_5 = 1$$

Анда жалпыланган Эйлердин методу боюнча интеграл төмөнкүчө колдонулат.

$$\varphi(x) = \int_0^1 (1+\sqrt{xs})\varphi(s)d\sqrt{s} \approx$$

$$\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{5}\left\{\left(1+\sqrt{x\cdot x_{j-1}}\right)\varphi\left(x_{j-1}\right)+\left(1+\sqrt{x\cdot x_j}\right)\varphi\left(x_j\right)\right\}(\sqrt{x_j}-\sqrt{x_{j-1}}) + \frac{\lambda}{12}\sum_{j=1}^{5}\left[\sqrt{x}\cdot\right.$$

$$\left.\varphi\left(x_{j-1}\right)+\left(1+\sqrt{x\cdot x_{j-1}}\right)\underbrace{\varphi'_{\sqrt{s}}\left(x_{j-1}\right)}_{\leq M}-\sqrt{x}\cdot\varphi\left(x_j\right)-\left(1+\sqrt{x\cdot x_j}\right)\underbrace{\varphi'_{\sqrt{s}}\left(x_j\right)}_{\leq M}\right]\cdot$$

$$\left\{\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i-1}}\right\}^2 \quad (2)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\lambda}{2}\{\left[\left(1+\sqrt{x\cdot x_0}\right)\varphi(x_0)+(1+\sqrt{x\cdot x_1})\varphi(x_1)\right]\cdot\left[\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}\right]+[(1+$$
$$\sqrt{x\cdot x_1})\varphi(x_1)+(1+\sqrt{x\cdot x_2})\varphi(x_2)]\cdot[\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}]+\left[(1+\sqrt{x\cdot x_2})\varphi(x_2)+\right.$$
$$\left.\left(1+\sqrt{x\cdot x_3}\right)\varphi(x_3)\right]\cdot\left[\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2}\right]+\left[\left(1+\sqrt{x\cdot x_3}\right)\varphi(x_3)+(1+\sqrt{x\cdot x_4})\varphi(x_4)\right]\cdot$$
$$\left[\sqrt{x_4}-\sqrt{x_3}\right]+\left[(1+\sqrt{x\cdot x_4})\varphi(x_4)+\left(1+\sqrt{x\cdot x_5}\right)\varphi(x_5)\right]\cdot\left[\sqrt{x_5}-\sqrt{x_4}\right]\}+$$
$$\frac{\lambda}{12}\left\{\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(x_0)+\left(1+\sqrt{x\cdot x_0}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(x_0)-\sqrt{x}\cdot\varphi(x_1)-(1+\sqrt{x\cdot x_1})\varphi'_{\sqrt{s}}(x_1)\right]\cdot\right.$$
$$\left[\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}\right]^2+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(x_1)+(1+\sqrt{x\cdot x_1})\varphi'_{\sqrt{s}}(x_1)-\sqrt{x}\cdot\varphi(x_2)-(1+\right.$$
$$\left.\sqrt{x\cdot x_2})\varphi'_{\sqrt{s}}(x_2)\right]\cdot[\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}]^2+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(x_2)+(1+\sqrt{x\cdot x_2})\varphi'_{\sqrt{s}}(x_2)-\right.$$
$$\left.\sqrt{x}\cdot\varphi(x_3)-\left(1+\sqrt{x\cdot x_3}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(x_3)\right]\cdot\left[\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2}\right]^2+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(x_3)+\left(1+\right.\right.$$
$$\left.\sqrt{x\cdot x_3}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(x_3)-\sqrt{x}\cdot\varphi(x_4)-(1+\sqrt{x\cdot x_4})\varphi'_{\sqrt{s}}(x_4)\left.\right]\cdot\left[\sqrt{x_4}-\sqrt{x_3}\right]^2+$$

$\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(x_4)+(1+\sqrt{x\cdot x_4})\varphi'_{\sqrt{s}}(x_4)-\sqrt{x}\cdot\varphi(x_5)-\left(1+\sqrt{x\cdot x_5}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(x_5)\right]\cdot$

$\left[\sqrt{x_5}-\sqrt{x_4}\right]^2\Big\}+f(x)$

Эми маанилерди коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\bar{\varphi}(x)=$$
$$\frac{\lambda}{2}\Big\{\left[\left(1+\sqrt{x\cdot 0}\right)\varphi(0)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}2}\right)\varphi(0{,}2)\right]\cdot 0{,}447+\left[\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}2}\right)\varphi(0{,}2)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}4}\right)\varphi(0{,}4)\right]\cdot 0{,}185+\left[\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}4}\right)\varphi(0{,}4)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}6}\right)\varphi(0{,}6)\right]\cdot 0{,}143+\left[\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}6}\right)\varphi(0{,}6)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}8}\right)\varphi(0{,}8)\right]\cdot 0{,}119+\left[\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}8}\right)\varphi(0{,}8)+\left(1+\sqrt{x\cdot 1}\right)\varphi(1)\right]\cdot 0{,}106\Big\}+\frac{\lambda}{12}\Big\{\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(0)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0)-\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}2)-\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}2}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}2)\right]\cdot 0{,}199+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}2)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}2}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}2)-\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}4)-\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}4}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}4)\right]\cdot 0{,}034+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}4)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}4}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}4)-\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}6)-\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}6}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}6)\right]\cdot 0{,}02+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}6)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}6}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}6)-\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}8)-\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}8}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}8)\right]\cdot 0{,}014+\left[\sqrt{x}\cdot\varphi(0{,}8)+\left(1+\sqrt{x\cdot 0{,}8}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}8)-\sqrt{x}\cdot\varphi(1)-\left(1+\sqrt{x\cdot 1}\right)\varphi'_{\sqrt{s}}(1)\right]\cdot 0{,}011\Big\}-\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\bar{\varphi}(x)=\frac{\lambda}{2}\Big\{\left[0{,}447+\frac{0{,}199}{6}\sqrt{x}\right]\varphi(0)+\left[0{,}632\left(1+\sqrt{0.2\cdot x}\right)-\frac{0{,}165}{6}\sqrt{x}\right]\varphi(0{,}2)+\left[0{,}328\left(1+\sqrt{0{,}4\cdot x}\right)-\frac{0{,}014}{6}\sqrt{x}\right]\varphi(0{,}4)+\left[0{,}262\left(1+\sqrt{0{,}6\cdot x}\right)-\frac{0{,}006}{6}\sqrt{x}\right]\varphi(0{,}6)+\left[0{,}225\left(1+\sqrt{0{,}8\cdot x}\right)-\frac{0{,}003}{6}\sqrt{x}\right]\varphi(0{,}8)+\left[0{,}106\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{0{,}011}{6}\sqrt{x}\right]\varphi(1)+\frac{0{,}199}{6}\varphi'_{\sqrt{s}}(0)-\frac{0{,}165}{6}(1+\sqrt{0{,}2\cdot x})\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}2)-\frac{0{,}014}{6}(1+\sqrt{0{,}4\cdot x})\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}4)-\frac{0{,}006}{6}(1+\sqrt{0{,}6\cdot x})\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}6)-\frac{0{,}003}{6}(1+\sqrt{0{,}8\cdot x})\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}8)-\frac{0{,}011}{6}(1+\sqrt{x})\varphi'_{\sqrt{s}}(1)\Big\} \quad (3)$$

Эми $\varphi(x)$ ти $g(x)$ боюнча туунду алсак:

$$\varphi'_{g(x)}(x)=\lambda\int_a^b K'_{g(x)}(x,s)\varphi(s)dg(s)+f'_{g(x)}(x)$$

Мында, $K'_{g(x)}(x,s)$=$\left[\left(1+\sqrt{xs}\right)'_{\sqrt{x}}\right] = \sqrt{s}$; $\quad f'_{g(x)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)'_{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$

$$\varphi'_{g(x)}(x) = \int_0^1 \sqrt{s}\cdot\varphi(s)dg(s) - \frac{1}{2} \qquad (4)$$

(3)→(4):

$$\varphi'_{g(x)}(x) = \frac{\lambda}{2}\{0{,}2345\cdot\varphi(0) + 0{,}4012\cdot\varphi(0{,}2) + 0{,}2322\cdot\varphi(0{,}4) + 0{,}1983\cdot \varphi(0{,}6) + 0{,}1793\cdot\varphi(0{,}8) + 0{,}0877\cdot\varphi(1) + 0{,}0166\cdot\varphi'_{\sqrt{s}}(0) - 0{,}0178\cdot\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}2) - 0{,}0017\cdot\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}4) - 0{,}0007\cdot\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}6) - 0{,}0004\cdot\varphi'_{\sqrt{s}}(0{,}8) - 0{,}0015\cdot\varphi'_{\sqrt{s}}(1)\} - \frac{1}{2} \qquad (5)$$

Эми (3) – жана (5) – формулаладагы $x = x_i, i = 0{,}1,\ldots{,}5$ деп төмөнкүдөй алгебралык теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = A_0(x_0)\varphi(x_0) + \ldots + A_5(x_5)\varphi(x_0) + A_0(x_0)\psi(x_0) + \ldots + A_5(x_5)\psi(x_0) + f(x_0) \\ \ldots \\ \varphi(x_5) = A_0(x_0)\varphi(x_5) + \ldots + A_5(x_5)\varphi(x_5) + A_0(x_0)\psi(x_5) + \ldots + A_5(x_5)\psi(x_5) + f(x_5) \\ \psi(x_0) = A'_0(x_0)\varphi(x_0) + \ldots + A'_5(x_5)\varphi(x_0) + A'_0(x_0)\psi(x_0) + \ldots + A'_5(x_5)\psi(x_0) + f'_{g(x)}(x_0) \\ \ldots \\ \psi(x_5) = A'_0(x_0)\varphi(x_5) + \ldots + A'_5(x_5)\varphi(x_5) + A'_0(x_0)\psi(x_5) + \ldots + A'_5(x_5)\psi(x_5) + f'_{g(x)}(x_5) \end{cases}$$

Бул алгебралык теңдемелер системасын Maple программасы аркылуу чыгарсак:

| | |
|---|---|
| $\varphi(0) = 0.9997179448745812$ | $\psi(0) = -0.016661965888843184$ |
| $\varphi(0{,}2) = 0.9997179448764265$ | $\psi(0{,}2) = -0.016661965888843045$ |
| $\varphi(0{,}4) = 0.999717944806369$ | $\psi(0{,}4) = -0.01666196588884313$ |
| $\varphi(0{,}6) = 0.9997179450412382$ | $\psi(0{,}6) = -0.01666196588884309$ |
| $\varphi(0{,}8) = 0.9997179447783282$ | $\psi(0{,}8) = -0.016661965888843083$ |
| $\varphi(1) = 0.9997179448670099$ | $\psi(1) = -0.016661965888843056$ |

$$\varphi(x) = 0.991256297641961 - 1.07656318104957\cdot 10^{-10}\cdot\sqrt{x}$$

## ЖЫЙЫНТЫК

Жыйынтыктай турган болсок, Стилтьестин интегралында колдонулган жакындаштырып эсептөө методдорунан Эйлердин жалпыланган методун колдонуп, каалаган тактыкта Стилтьес интегралын дагы жакындаштырып эсептөө мүмкүн экендиги көрсөтүлгөндөй, Фредгольм – Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган Эйлердин методу менен чыгаруу мүмкүн экендиги көрсөтүлдү.

**АДАБИЯТТАР**

[1] Асанов, А. (2001). Производная функции по возрастающей функции. Кыргызско-Турецкий Университет Манас, 1(2): 18-45

[2] И.В.Садовничная, Е.В.Хорошилова (2008). Определённый интеграл: теория и практика вычислениий. Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова: 387-399

[3] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х., Математический анализ Т.I,II.

М: изд-во, Моск. Ун-та, 1985.

[4] Н.Н Калиткин "Численные методы" М.: Наука, 1978

[5] Елеев В. А., Балкизов Ж. А., Бориев С. М. Лабораторный практикум по интегральным уравнениям.

[6] Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000.

[7] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. Справочник по интегральным уравнениям. Москва, Физматлит, 2003.

[8] Avyt Asanov, M.Haluk Chelik, Ali Chalish "Approximating the Stiltjes integral by using the generalized trapezoid rule" // Le Mathematiche Vol. LXVI (2011) – Fasc. II, pp. 13-21.

[9] Avyt Asanov, M.Haluk Chelik, M. Muso Abdujabarov "Approximating the Stiltjes Integral by Using the Generalized Midpoint Rule" // MATEMATIKA, 2011, Volume 27, Number 2, 139-148.

[10] Avyt Asanov, M.Haluk Chelik, Murat Sezer "Approximating the Stiltjes Integral by Using the Generalized Simpson's Rule" // Communication in Differential and Differencial Equations. Volume 3, Number 1 (2012), pp. 1-11. International Research Publications House. http: //www.irphouse.com

[11] Delves L.M., Mohamed J.L.(1985) Computational methods for integral equations, Cambridge University Press, New York,USA

[12] Wolfgang H. (1995), Integral Equations; theory and numerical treatment, Birkhauser, Basel, Germany

[13] I.P.Natanson, Theory of functions with the real variable, Nauka, Moscow (1974) (in Russian).

[14] Silverman, R.A. (1985). Calculus with Analytic Geometry. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

**ТИРКЕМЕ**

$restart:$

$with(LinearAlgebra):$

$K := (x,s) \to 1 + sqrt(x):$

$p := x \to sqrt(x):$

$K1 := (x,s) \to simplify(\frac{diff(K(x,s),x)}{diff(p(x),x)}, symbolic):$

$K2 := (x,s) \to simplify(\frac{diff(K(x,s),s)}{diff(p(s),s)}, symbolic):$

$K3 := (x,s) \to simplify(\frac{diff(\frac{diff(K(x,s),x)}{diff(p(x),x)})}{diff(p(x),x)}, symbolic):$

$f := x \to -\frac{1}{2} \cdot sqrt(x):$

$f1 := x \to \frac{diff(f(x),x)}{diff(p(x),x)}:$

$n := 100:$

$a := 0.0:$

$b := 1.0:$

$h := \frac{b-a}{n}:$

$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ x_i := a + (i-1) \cdot h\ end\ do:$

$A := Matrix(2 \cdot n + 1):$

$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ A(i,1) := K(x[i], x[1]) \cdot (p(x[2]) - p(x[1])) +$
$\frac{1}{6} \cdot subs(s = x[1], K2(x[i], s)) \cdot (p(x[2]) - p(x[1]))^2 end\ do:$

$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ for\ j\ from\ 2\ to\ n\ do\ A(i,j) :=$
$(K(x[i], x[j])) \cdot (p(x[j+1]) - p(x[j])) + (K(x[i], x[j])) \cdot (p(x[j]) - p(x[j-1])) +$
$\frac{1}{6} \cdot (subs(s = x[j], K2(x[i], s))) \cdot (p(x[j+1]) - p(x[j]))^2 -$
$\frac{1}{6} \cdot (subs(s = x[j], K2(x[i], s))) \cdot (p(x[j]) - p(x[j-1]))^2 end\ do\ end\ do:$

$$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ A(i,n+1) := K(x[i],x[n+1])\cdot(p(x[n+1])-p(x[n]))-$$
$$\frac{1}{6}\cdot subs(s=x[n+1],K2(x[i],s))\cdot(p(x[n+1])-p(x[n]))^2 end\ do:$$

$$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ A(i,n+2) := \frac{1}{6}\cdot K(x[i],x[1])\cdot(p(x[n+1])-p(x[n]))^2\ end\ do:$$

$$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ for\ j\ from\ n+3\ to\ 2\cdot n+1\ do\ A(i,j) :=$$
$$\frac{1}{6}\cdot((K(x[i],x[j-n-1]))\cdot(p(x[j-n])-p(x[j-n-1]))^2-$$
$$(K(x[i],x[j-n-1]))\cdot(p(x[j-n-1])-p(x[j-n-2]))^2)\ end\ do\ end\ do:$$

$$for\ i\ from\ 1\ to\ n+1\ do\ A(i,2\cdot n+2) := -\frac{1}{6}\cdot K(x[i],x[n+1])\cdot(p(x[n+1])-p(x[n]))^2\ end\ do:$$

$$for\ i\ from\ n+2\ to\ 2\cdot n+2\ do\ A(i,1) := subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[1]))\cdot(p(x[2])-p(x[1]))+$$
$$\frac{1}{6}\cdot subs(\{x=x[i-n-1],s=x[1]\},K3(x,s))\cdot(p(x[2])-p(x[1]))^2\ end\ do:$$

$$for\ i\ from\ n+2\ to\ 2\cdot n+2\ do\ for\ j\ from\ 2\ to\ n\ do\ A(i,j) :=$$
$$subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[j]))\cdot(p(x[j+1])-p(x[j]))+$$
$$subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[j]))\cdot(p(x[j])-p(x[j-1]))+$$
$$\frac{1}{6}\cdot subs(\{x=x[i-n-1],s=x[j]\},K3(x,s))\cdot(p(x[j+1])-p(x[j]))^2-$$
$$\frac{1}{6}\cdot subs(\{x=x[i-n-1],s=x[j]\},K3(x,s))\cdot(p(x[j])-p(x[j-1]))^2\ end\ do\ end\ do:$$

$$for\ i\ from\ n+2\ to\ 2\cdot n+2\ do\ A(i,n+1) :=$$
$$subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[n+1]))\cdot(p(x[n+1])-p(x[n]))-$$
$$\frac{1}{6}\cdot subs(\{x=x[i-n-1],s=x[n+1]\},K3(x,s))\cdot(p(x[n+1])-p(x[n]))^2\ end\ do:$$

$$for\ i\ from\ n+2\ to\ 2\cdot n+2\ do\ A(i,1) := \frac{1}{6}\cdot subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[1]))\cdot(p(x[2])-p(x[1]))^2 end\ do:$$

$$for\ i\ from\ n+2\ to\ 2\cdot n+2\ do\ for\ j\ from\ n+3\ to\ 2\cdot n+1\ do\ A(i,j) :=$$
$$\frac{1}{6}\cdot(subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[j-n-1]))\cdot(p(x[j-n])-p(x[j-n-1]))^2)-$$
$$subs(x=x[i-n-1],K1(x,x[j-n-1]))\cdot(p(x[j-n-1])-p(x[j-n-2]))^2))\ end\ do\ end\ do:$$

$for\ i\ from\ n+2\ to\ 2\cdot n+2\ do\ A(i, 2\cdot n+2) := -\frac{1}{6}\cdot subs(x = x[i-n-1], K1(x, x[n+1]))\cdot$
$(p(x[n+1]) - p(x[n]))^2\ end\ do:$

$C := IdentityMatrix(2\cdot n+2) - \frac{1}{2}\cdot A:$

$Determinant(C):$

$for\ i\ to\ n+1\ do\ F(i, 1) := f(x[i])\ end\ do:$

$for\ i\ to\ n+1\ do\ F(n+1+i, 1) := subs(x = x[i], f1(x))\ end\ do:$

$\Pr := Multiply(MatrixInverse(C), F)$
$for\ i\ to\ n+1\ do\ u[i] := \Pr(i, 1)\ end\ do:$
$for\ i\ to\ n+1\ do\ v[i] := \Pr(n+1+i, 1)\ end\ do:$

$$U := y \to \frac{1}{2}\cdot add\Big(\big(K(y, x[i])\cdot u[i] + K(y, x[i+1])\cdot u[i+1]\big)\cdot\big(p(x[i+1]) - p(x[i])\big), i = 1..n\Big) + \frac{1}{12}\cdot\left(\left(\begin{array}{l} subs(x = y, K1(x, x[i]))\cdot u[i] + \\ K(y, x[i])\cdot v[i] - \\ subs(x = y, K1(x, x[i+1]))\cdot u[i+1] - \\ K(y, x[i+1])\cdot v[i+1] \end{array}\right)\cdot\big(p(x[i+1]) - p(x[i])\big)^2, i = 1..n\right) + f(y):$$

$$U(x) = 0.999897970442973 - 1.31724282822550\cdot 10^{-11}\cdot\sqrt{x}$$

**Жооптору:**

| n | Жалпыланган Эйлердин методу |
|---|---|
| 5 | $0.991256297641961 - 1.07656318104957 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{x}$ |
| 10 | $0.996870187186976 - 6.40491155799077 \cdot 10^{-11} \cdot \sqrt{x}$ |
| 50 | $0.999713385829679 - 4.51438145151016 \cdot 10^{-12} \cdot \sqrt{x}$ |
| 100 | $0.999897970442973 - 1.31724282822550 \cdot 10^{-11} \cdot \sqrt{x}$ |
| 500 | $0.999990783311419 - 2.28097687870152 \cdot 10^{-12} \cdot \sqrt{x}$ |

**АВТОБИОГРАФИЯ**

**Жеке маалыматтар:**

| | |
|---|---|
| Аты, Фамилиясы: | Мелисбек ГАППАРОВ |
| Улуту: | кыргыз |
| Туулган жылы / жери: | 1991-ж |
| Үй – бүлөсү: | никеси жок |
| Тел: | +996557253527 |
| Факс: | |
| e-mail: | melisbek.gapparov@gmail.com; mls_gprv@mail.ru |

**Академиялык билими:**

| **Даражасы** | **Курум** | **Бүтүргөн жылы** |
|---|---|---|
| Магистратура | КТУ “МАНАС” | ....... |
| Бакалавр | КТУ “МАНАС” | 2012 |
| Лицей | Кадамжай кыргыз-түрк лицейи | 2008 |

**Стаж:**

| **Жылы** | **Мекеме** | **Милдети** |
|---|---|---|
| 2011 – 2012 | “Silk Road” international school | Ассистент |
| 2012 – ....... | “Кут Билим” лицейи | Мугалим |

**Чет тилдер:**

Орус тили

Түрк тили

Англис тили