KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERGEOMETRİK SERİLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sefa UTOĞLU

BİŞKEK-2011

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ FEN
BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERGEOMETRİK SERİLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sefa UTOĞLU

Tez Danışmanı
Prof.Dr.Ramiz RAFATOV

BİŞKEK-2011

İntihal Yapılmadığını Belirten İfade

Ben bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallara göre aldığımı ve sunduğumu belirtiyorum.Bu çalışmaya özgün olmadan kullandığım bütün materyal ve bilgilere akademik ve etik kurallar gereğince atıfta bulunduğumu ve hiçbir şekilde intihal yapmadığımı açıkça bildiriyorum.

İSİM,SOYAD: Sefa UTOĞLU
İMZA:
TARİH:

Плагиат жасалбагандыгы тууралуу билдируу

Мен бул эмгекте алынган бардык маалыматтарды академияалык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум.Тагыраак айтганда бул эмгекте колдонулган бирок мага тишелүү болбогон малыматтардын бардыгын тиркеьеде так көрсөттүм жана эч кайы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кеткимкелет.

АТЫ,ЖӨНҮ: Сефа УТОГЛУ
КОЛУ:
ДАТАСЫ:

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE
MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Anabilim dalı,Matematik Bilim dalı'nda 0951Y03002 numaralı Sefa UTOĞLU'nun hazırladığı "Hipergeometrik Seriler ve Uygulamaları" konulu Yüksek Lisans ile ilgili tez savunma sınavı, ../../ 2011 günü ..-.. saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin................olduğuna.........ile karar verilmiştir.

Jüri Başkanı
Doç.Dr.Ümetaliev Marat
İ.Razzakov KDTÜ

Üye (Tez Danışmanı)	Üye
Prof. Dr. Ramiz RAFATOV	Prof. Dr. Avıt Asanov
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi	Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi
Üye	Üye
Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİEV	Öğr. Gör. Dr. Elmira ABDILDAYEVA
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi	Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi

ЧЕЧИМ

Кыргыз-Түрк Манас университетинин Табигый илимдер институтунун экзамендик инструкциясынын ………….. жобосун,………….№ жыйынында уюшулган комиссия, математика бөлүмүнүн магистранты Сефа УТОГЛУ «ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫК КАТАР ЖАНА МИСАЛДАРЫ» темасында жазган магистрдик диссертацияны анализдеп, …../…../2011 ж. саат …….дө жактоого кабыл алды.

Магистрант …….минута убакыт ичинде дипломдук магистрдик диссертацияны жактап, комиссия……………….(*көпчүлүк добуш менен/бир добуштан)…………….. (Кабыл алынбайт/ Кабыл алынсын /Кайра оңдолсун)* деген чечим чыгарды.

Жюри төрагасы
Т.и.к., доц. Үметалиев Марат
И. Раззаков атындагы КГТУ

Жюри мүчөсү
Ф.-м.и.д., проф. Рамиз Рафатов
Кыргыз-Түрк Манас Университети

Жюри мүчөсү
Ф.-м.и.д., проф. Авыт Асанов
Кыргыз-Түрк Манас Университети

Жюри мүчөсү
Ф.-м.и.д., проф. Асан Өмүралиев
Кыргыз-Түрк Манас Университети

Жюри мүчөсү
Др.Элмира АБДЫЛДАЕВА
Кыргыз-Түрк Манас Университети

……./……./2011

ÖZ

Yazar : Sefa UTOĞLU

Üniversite : Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi

Anabilim Dalı : Fen Bilimleri

Bilim Dalı : Matematik

Tezin Niteliği : Yüksek Lisans Tezi

Sayfa Sayısı : IX+18

Mezuniyet Tarihi : Aralık 2011

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ramiz RAFATOV

HİPERGEOMETRİK SERİLER VE UYGULAMALARI

Bu tezde sayılar teorisi, fizik, istatistik, ve bilgisayar alanlarında birçok uygulamaya sahip olan hipergeometrik serilerin bazı özellikleri verilmiştir.

İlk olarak tez için gerekli olan genel tanımlar ve konu için kullanacağımız bazı temel toremler içermektedir.Hipergeometrik fonksiyonların kullanım alanlarından bahsedilmiştir.İkinci dereceden lineer denklem yardımıyla Hipergeometrik denklemi ve Hipergeometrik fonksiyonlar elde edilmiştir.

Ardından bazı toplama ve dönüşüm formülleriyle hipergeometrik denklemler hakkında bilgi ,toremler ve uygulamalar verilmiştir. En sonunda temel Hipergeometrik Seriler hakkında teoremler ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hipergeometrik Seri, Hipergeometrik Fonksiyon, Hipergeometrik Denklem.

КЫСКАЧА МАЗМУНУ

Даярдаган : Сефа УТОГЛУ
Университет : Кыргызстан-Туркия Манас Университети
Институт : Табигий Илимдер Институту
Багыты : Математика
Иштин сыпаты : Магистрстура
Беттердин саны : IX+18
Бүтүрүү датасы : Декабр 2011
Диссертация жетекчиси : Проф. Док Рамиз РАФАТОВ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫК КАТАР ЖАНА МИСАЛ ДАРЫ

Бул изилдөөдө сан теориясы, физика, статистика жана компьютер чөйрөсүндөгү гипергеометрикалык катарлардын кээ бир өзгөчөлүктөрү берилди. Биринчи кезекте, изилдөөдө керек болгон жалпы мүнөздөмөлөр жана тема үчүн колдонула турган кээ бир негизги теоремалар бар.

Изилдөөдө гипергеометрикалык функциялардын колдонуусу жөнүндө да айтылды. Экинчи даражадагы сызыктуу теңдемесинин жардамы менен гипергеометрикалык теңдеме жана гипергеометрикалык функциялар алынды.

Кээ бир кошуу жана айлануу формулалары менен гипергеометрикалык теңдемелер жөнүндө маалымат берилди. Эң акырында жалпы гипергеометрикалык катарлар жөнүндө теориялар далилденди.

Ачкыч сөздөр: Гипергеометрикалык катар, Гипергеометрикалык функция, Гипергеометрикалык тендеме.

АБСТРАКТ

Автор	: Сефа УТОГЛУ
Университет	: Кыргызстан-Турция Манас Университети
Институт	: Естественных Наук
Кафедра	: Математика
Качество диссертации	: Магистратура
Количество страниц	: IX+18
Дата выпуска	: Декабр 2011
Руководитель диссертации	: Проф. Док.Рамиз РАФАТОВ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом дисертации даны некоторые особенности гипергеометрических ряд в сфере теории цифр, физики, статистики и компьютера.

В первую очередь в дисертации даны необходимые общие определения и теоремы.

Здесь использоваться о применениях гипергеометрических функций. С помощью линейного уравнения во второй степени была получена гипергеометрическая функция и гипергеометрическое уравнение.

В дисертации даны информации о некоторых формулах сложения, превращения в гипергеометрических уравнениях. В конце дисертации были доказаны теории общего гипергеометрического ряда.

Ключевые слова: гипергеометрически ряд, гипергеометрическая функция, гипергеометрическое уравнение

ABSTRACT

Prepared by : Sefa UTOĞLU

University : Kyrgyzstan-Turkey Manas University

Institute : Natural Sciences

Department : Mathematics

Thesis Level : Master Thesis

Number of Pages : IX+18

Graduate Date : December 2011

Thesis Advisor : Prof.Dr. Ramiz RAFATOV

HYPERGEOMETRİC SERİES AND THEİR APPLİCATİONS

In this thesis, some properties of Hypergeometric Series, which is involved in the areas of number theory, physics, statistics and computer science, were given.

First of all, the general definitions necessary for the thesis and some basic theorems that will be used to explain the topic were taken in hand. The using areas of the Hyperfeometric functions were mentioned. By means of quadratic linear equations, Hypergeometric equations and Hypergeometric functions were obtained.

After that, with some summation and transformation formulas, inormation, theorems and applications were given. Finally, the theorems about Basis Hypergeometric Series were proved.

Keywords: Hypergeometric Series, Hypergeometric Function, Hypergeometric Equation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamım bütün aşamalarında bana ayırdığı kıymetli zamanı ve paylaştığı çok değerli bilgileri ile bana yol gösteren sayın hocam Prof.Dr.Ramiz RAFATOV'a , çalışmamda zaman noktasında vermiş olduğu büyük destekten dolayı Enstitü Müdürümüz sayın Prof.Dr. Zafer GÖNÜLALAN'a , değerli yardımlarından dolayı bölüm başkanımız Prof.Dr.Avıt ASANOV'a, ilgilerinden dolayı enstitiümüzün kıymetli sekreteri Bakıt RAHİMOV'a ve ayrıca herzaman bana destek veren aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$F\ a,b;c;\ z$: Hipergeometrik fonksiyon

$J\ x$: Bessel fonksiyonu

$B\ u,v$: Beta fonksiyonu

$l\ P\ x$: Legendre polinomu

z : Gamma fonksiyonu

z,b : Tamamlanmamış Gamma fonksiyonu

1. Hipergeometrik Seriler ve Fonksiyonlar

Açıklama*:* Eğer c_{n+1} / c_n denklemi n-ye bağımlı rasyonel fonksiyon ise, o halde $\sum c_n$ - serisine Hipergeometrik serisi denir. Buradan n indeksi sıfırdan başlayan pozitif değerlere sahip olur , bu durumdan seri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix} ; \quad \mathrm{x}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n\, x^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n\, n!}, \qquad (1) $$

Burada
$$ (a)_n = \begin{cases} a(a+1)\dots(a+n-1), & n = 1,2,\dots, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \qquad (2) $$
olur.

(1) serisi $p \le q$ olduğunda herhangi bir x için toplam seri olur, ve en azından rasyonel sayıların bölünen kısmından en az bir tanesi de olsa sıfıra veya negatif sayıya eşit olmaz ise:

Seri $p = q + 1$ ise $|x| < 1$ için $p > q + 1$ olunca sadece $x = 0$ için toplama olur.

Örnek olarak binom serisin alabiliriz.

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; \quad \mathrm{x}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{n!}. \qquad (3) $$

Bu seri sadece $|x| < 1$ için toplama serisi olur , fakat binom teoremi

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; \quad \mathrm{x}\right] = (1-x)^{-a}, \qquad (4) $$

yardımıyla toplanabilir.

Bu özellik ${}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; \quad \mathrm{x}\right]$ fonksiyonun $x = 1$ den $x = \infty$ kadarki on defa çizgiyi kesen karmaşık x -in değerlerine analitik yaklaşım için yol olur.

(3) serisini kendisi ile çarparak x in eşit derecelerinin katsayılarını toplayarak aşağıdaki seriyi elde ederiz;

$$ \sum_{n=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{(a+b)_n}{n!}. \qquad (5) $$

$$ (b)_{n-k} = (b)_n (-1)^k / (1-b-n)_k, \qquad (6) $$

(6) .formülünü kullanarak (5) serisini aşağıdaki gibi yazarız;

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} -n, & a \\ 1-n-b \end{bmatrix}; \quad 1\Bigg] = \frac{(a+b)_n}{(b)_n}. $$

Eğer, $c = 1 - n - b$ olarak ifadeyi yazarsak, (6) eşitliğinin yardımıyla aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, & a \\ & c \end{matrix}; \quad 1\right] = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}. \qquad (7) $$

(5) serisinin değerini anlamak için aşağıdaki gibi yazarız

$$ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_k\,(k+1)^{1-a}}{k!}\,\frac{(b)_{n-k}\,(n+1-k)^{1-b}}{(n-k)!}\left[\frac{k+1}{n+1}\right]^{a-1}\left[1-\frac{k}{n+1}\right]^{b-1} = \frac{(a+b)_n}{n!}(n+1)^{1-a-b}. $$

(8)

(8)denklemindeki toplamını k ya 3 defa bölelim : 0 dan $[\log n]$ ye kadar; *(n-*$[\log n]$*)* den n ye kadar; *k* nin kalan değerleriyle *n* yi sonsuza kadar götürürüz.. Limiti hesaplamak için Gamma fonksiyonunda Euler'i kullanarak aşağıdaki gibi yazarız:

$$ \frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a)_n}{n!}n^{1-a}, \qquad (9) $$

Veya

$$ \Gamma(a+1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n+a}\right]\left[1+\frac{1}{n}\right]^{a}. \qquad (10) $$

eşitliği gibi yazarız.

Sonucunda aşağıdaki ifadeye geliriz;

$$ \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \qquad \operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0. \qquad (11) $$

Dolayısıyla , (5) ve (7).ifadelerden,

$$ \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt = \Gamma(a), \qquad \operatorname{Re} a > 0. \qquad (12) $$

sonucu elde edilir.

Bu integrallerin kullanımı Hipergeometrik serinin integral biçiminde ifade edilmesini sağlar. Binom teoremi ve (11) formülü Euler integraline getirilir.

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a,b, & ; & x \\ c & & \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-xt)^{-a} t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} dt. \qquad (13) $$

(13) formülünü t *değişkeniyle aşağıdaki gibi değiştirebiliriz.* $t \to 1-t$ o halde

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\begin{bmatrix} a,b, & ; & x \\ c & & \end{bmatrix} &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-x+xt)^{-a} t^{c-b-1} (1-t)^{b-1} dt = \\ &= (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\begin{bmatrix} a,c-b & ; & \dfrac{x}{x-1} \\ c & & \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (14) $$

(13) integrali ${}_2F_1\begin{bmatrix} a,b & ; & x \\ c & & \end{bmatrix}$ fonksiyonun $x=1$ den $x=\infty$ kadarki on defa çizgiyi kesen karmaşık x-in değerlerine analitik yaklaşımla ulaşabiliriz. Onunla beraber b ve c parametrelerine sınırlar konulur, çünkü (13) integrali $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b$ olunca ancak toplanmalı olur. $\operatorname{Re} x < 1/2$ olunca $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| < 1$ olduğundan, $\operatorname{Re} x < 1/2$ kümesinde (14) formülü ${}_2F_1\begin{bmatrix} a,b & ; & x \\ c & & \end{bmatrix}$ fonksiyonu analitik yaklaşımı kullanarak devam etmeye yol açar, dolayısıyla (14) formülündeki parametrelere konulacak sınırlar iptal edilir.

Euler ifadesiyle $y = {}_2F_1(\grave{a};\hat{a};\tilde{n};\tilde{o})$ fonksiyonu

$$ x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \qquad (15) $$

Diferensiyal denklemini sağlar. Ve $(1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1\begin{bmatrix} c-a,c-b & ; & x \\ c & & \end{bmatrix}$ (15) denkleminin çözümü olacağını göstererek,

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a,b & : & x \\ c & & \end{bmatrix} = (1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1\begin{bmatrix} c-a,c-b & ; & x \\ c & & \end{bmatrix} \qquad (16) $$

Formülü bulundu.

Gaussun temel işlemi sonrası Hipergeometrik serilerini sistematik şekilde gelişmeye başlanmiş. Bir çift parametre bir farkla ifade edildiyse kalan parametreleri çift çift birbirine eşit iki fonksiyonuna ${}_2F_1$ ye komşu fonksiyon denir. Eğer $F = {}_2F_1(a,b;c;x)$ fonksiyonu verildise o halde $F(a\pm) = {}_2F_1(a\pm 1,b;c;x)$ fonksiyonu komşu fonksiyon , aynı zamanda $F(b\pm)$ ve $F(c\pm)$ fonksiyonları F fonksiyonu ile komşu olurlar.

Gauss ${}_2F_1(a,b;c;x)$ serisi ve ona komşu olan iki seri arasında lineer bağımlılık gerçekleştiğini gösteriyor

Devamlı rasyonel için ${}_2F_1(a,b+1;c+1;x)/{}_2F_1(a,b;c;x)$ Gauss yeni ayırımı bulmuş. Bu ayırım aşağıdaki gibi

$$\frac{{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b+1\\c+1\end{matrix};x\right]}{{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x\right]}=\frac{1}{1-\frac{d_0x}{1-\frac{d_1x}{1-\frac{d_2x}{1\ldots}}}}, \tag{17}$$

Burada

$$d_{2n}=\frac{(a+n)(c-b+n)}{(c+2n)(c+2n+1)}, \tag{18}$$

$$d_{2n+1}=\frac{(b+1+n)(c-a+1+n)}{(c+2n+1)(c+2n+2)}. \tag{19}$$

${}_2F_1$ fonksiyonu için (14), (16) lineer değişimden başka bir parametreye bağlı olarak seçtikten sonra karesel değişim gerçekleşir. Bu değişimlerin özel ifadelerini Landen ve Lagranj ispatlamışlardır, ondan sonra Gauss ${}_2F_1$ fonksiyonu için bir parametre sınırladığı zaman genel ifade bulmuştur. Bu ifade $(1-2r\cos\theta+r^2)^{-k}$ fonksiyonu $\cos n\theta$ olarak Fourier serisine ayırdığında meydana gelecek sonucunu göstermiştir.Gauss eşitliği ;

$$(1-2r\cos\theta+r^2)^{-k}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\theta, \tag{20}$$

burada

$$a_n=\frac{(k)_n}{n!}r^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}k,k+1\\n+1\end{matrix};r^2\right]= \tag{21}$$

$$=\frac{(k)_n}{n!}(1+r^2)^{-k-n}r^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}(k+n)/2,\ (k+n+1)/2\\n+1\end{matrix};\frac{4r^2}{(1+r^2)^2}\right]=$$

$$=\frac{(k)_n}{n!}(1+r^2)^{-2k-2n}r^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}k+n,\ n+1/2\\2n+1\end{matrix};\frac{4r}{(1+r)^2}\right]=$$

$$=\frac{(k)_n}{n!}(1+r^2)^{-2k-2n}r^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}k+n,\ n+1/2\\2n+1\end{matrix};\frac{-4r}{(1-r)^2}\right].$$

Gauss karesel değişimi kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşmıştır

$${}_2F_1(a,b;a+b+1/2;4x(1-x)) = {}_2F_1(2a,2b;a+b+1/2;x). \qquad (22)$$

Bu sonuç Gaussun Hipergeometrik diferensiyal denklemiyle direk bağıntı oluşturmuştur.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c > a+b \qquad (23)$$

Sonsuz serisi $c > a+b$ olduğu halde toplanma serisini ispatlamak için kullanmıştır.

.Pfaffanın toplamından:

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} -n,a,b \\ c,a+b+1-c-n \end{matrix};\ 1\right] = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}. \qquad (24)$$

$n \to \infty$ (23) formülü elde edilir.

Eğer y_1 ve y_2 fonksiyonları (15) denklemin çözümü ise o halde fonksiyonların aşağıdaki Hipergeometrik seriler yoluyla ispatlanacağını Klausen göstermiştir.

$$y_1 = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right] \qquad (25)$$

$$y_2 = x^{1-c}{}_2F_1\left[\begin{matrix} a+1-c,b+1-c \\ 2-c \end{matrix};x\right]. \qquad (26)$$

Aynı zamanda Klausen y_1^2, y_2^2 ve y_1y_2 fonksiyonları üçüncü derecedeki denklemi sağlıyorsa, $c = a+b+1/2$ ise ${}_3F_2$ fonksiyonu üçüncü derecedeki denklemin çözümü olacağını aşağıdaki sonuçla göstermiştir.

$$\left[{}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ a+b+1/2 \end{matrix};x\right]\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2a,2b,a+b \\ a+b+1/2,2a+2b \end{matrix};x\right]. \qquad (27)$$

Diferensiyal denklemlerin bakışıyla Kummer ${}_2F_1$ fonksiyonun bir çok özelliklerini tanımlamıştır. (15) denklemin 24 tane çözümü olduğunu göstermiştir. x in pozitif derecesi olarak 4 dereceli seri çözümünü bulmuştur. Yani, yukarıda gösterilen y_1 ve y_2 çözümü, aynı zamanda (16). formül yardımıyla bulunan sonuçlardır. Değişimleri bu kurallar ifadesiyle değiştirerek $x \to 1-x, x \to x^{-1}, x \to 1-x^{-1}, x \to x(x-1)^{-1}$ ve $x \to (1-x)^{-1}$ Hipergeometrik diferensiyal denklemi elde ederiz. Bu denklem 4 adet çözümden oluşan 5 adet grub halindedir. Bu çözümlerin 3 tanesi lineer bağımsız çözümlerdir. Bu özellik ${}_2F_1$ fonksiyonun 1 den ∞ kadarki aralıkla pozitif doğruyu kesen karmaşık ifadelerle tanımlanır.

Kummer (15) denklemin $x=1$ noktadaki özellikleri incelemiştir. Onun için (15) denklemindeki değişim büyüklüğü $x \to x/b$ değişim büyüklüğüyle değiştirerek $b \to \infty$ giderken $x=b$ noktasına kaydırmıştır. Böyle değişim $x=b$ ve $x=\infty$ olduğu regular özel noktaları $x=\infty$ olduğu regular olmayan özel noktalara geçebileceğini bulmuştur. Ve bu değişimler sonucunda aşağıdaki denklemi elde etmiştir

$$ {}_1F_1\left[\begin{matrix} b \\ c \end{matrix};x\right] = e^x {}_1F_1\left[\begin{matrix} c-b \\ c \end{matrix};-x\right]. \tag{28}$$

Elde edilen sonuçları $x=1$ zamanında toparlayarak ${}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};x\right]$ fonksiyonuna kullanmıştır.Parametrele konulan bir sınır olarak karesel değişim yoluyla ${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right]$ fonksiyon araştırılmıştır.

Bu araştırmanın örneği (22) .ci formülde hesaplanmıştır. Bundan başka örnekler olarak aşağıdaki fonksiyonlar :

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ b-a+1 \end{matrix};x^2\right] = (1-x)^{-2b} {}_2F_1\left[\begin{matrix} b,b-a+1/2 \\ 2b-2a+1 \end{matrix};\frac{-4x}{(1-x^2)}\right], \tag{29}$$

Parametre özel şekilde seçilerek $x=1/2$ noktasındaki ${}_2F_1$ fonksiyonun değerini hesaplamada (22).formülü (karesel değiştirmeyi) kullanmak mümkündür. O halde aşağıdaki formülü ele alırsak:

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 2a,2b \\ a+b+1/2 \end{matrix};1/2\right] = \frac{\Gamma(a+b+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}. \tag{30}$$

Parametrelerin ifadelerinde asıl ve başlangıç fonksiyonları Hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla tanıtmak fonksiyonların en önemli özelliklerinden sayılır:
Başlangıç fonksiyonlar için örnekler:

$$(1+x)^n = F(-n,\beta,\beta;-x), \qquad x^n = F(-n,\beta,\beta;1-x)$$

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = F(1,1,2;-x) \quad , \quad e^x = \lim_{n\to\infty} F(1,n,1;\frac{x}{n})$$

$$\cos x = \lim_{\alpha,\,\beta\to\infty} F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$$

Lejandrın polinomu:

$$P_n(x) = F(n+1,-n,1;\frac{1-x}{2})$$

Lejandrın fonksiyonu:

$$P_{n,\,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)}F\left(n+m+1,m-n,m+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

Bessel fonksiyonu:

$$J_\nu(x) = \lim_{\alpha,\,\beta\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}F(\alpha,\beta,\nu+1;-\frac{x^2}{4\alpha\beta})\right]$$

2. Hipergeometrik Denklemler

Hipergeometrik veya Gauss denklemi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$x(1-x)y'' + [-\gamma - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \qquad (1)$$

Burada a, b, γ -reel sayılar.

$x=1$ ve $x=0$ noktaları (1) denklemdekinen farklı noktaları olur. $x=0$ naktasının yanında (1) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$y'' + \frac{[-\gamma - (a+b+1)x]\sum_{k=0}^{\infty} x^k}{x} y' - \frac{ab\sum_{k=0}^{\infty} x^k + 1}{x^2} y = 0. \qquad (2)$$

$x=0$ noktasına denk gelen ifade aşağıdaki gibi

$$\lambda(\lambda-1) + \gamma\lambda = 0. \qquad (3)$$

(3) denklemin kökleri $\lambda = 0,\ \ \lambda = 1-\gamma$. Eğer γ -negatif sayı değilse, o halde Gauss denklemi $|x|<1$ olduğunda toplam iki lineer bağımsız çözümü bulabiliriz.

Örmek 1: $x(1-x)y'' + [-\gamma - (a+b+1)x]y' - aby = 0$ denklemin $|x|<1$ ve γ -bütün ters sayı olmayan andaki çözümünü bulalım;

Çözüm: Denklem ifadelerini bulalım, bunlar $\lambda = 0,\ \ \lambda = 1-\gamma$. Ve daha $\lambda = 0$ köklerine denk gelen çözümleri bulalım

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \qquad (4)$$

(4) çözümdeki c_k büyüklüğün değerini bulmak için (4)formülünde denklemi yerine koyarak

$$x(1-x)\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} + [-\gamma - (a+b+1)x]\sum_{k=2}^{\infty} c_k k x^{k-1} - ab\sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k = 0. \qquad (5)$$

x in eşit derecedeki kat sayıların sıfıra eşitleyerek, c_k ye göre denklemini elde etmiş oluruz.

$$k(k-1)c_k - k(k+1)c_{k+1} - \gamma(k+1)c_{k+1} + (a+b+1)kc_k + abc_k = 0,$$
$$c_{k+1} = \frac{k(k-1)+(a+b+1)k+ab}{(k+\gamma)(k+1)}c_k = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+\gamma)(k+1)}c_k, \qquad (6)$$
$$k = 0,1,2,...$$

$c_0 = 1$ diye kabul edelim c_k nin kalan değerlerini yan yana bulalım

$$c_1 = \frac{ab}{\gamma}, \quad c_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}, \; c_3 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, ...$$
$$..., \quad c_k = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+k-1)}, ... \quad . \qquad (7)$$

Dolayısıyla, aradığımız $y_1(x)$ çözümü aşağıdaki gibi yazılır

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+k-1)}x^k. \quad (8)$$

(8) ifadedeki çözüme Hipergeometrik serisi denir ve $|x| < 1$ olunca toplama serisi olur, bunun toplamına ise Hipergeometrik fonksiyon denir.

$${}_2F_1(a,b,\gamma,x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+k-1)}x^k. \; (9)$$

Denklem $y_1(x)$ çözümüyle lineer bağımsız ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \; . \qquad (10)$$

Verilen denklemdeki aradığımız fonksiyonu yeni fonksiyonla değiştirirsek;

$$y(x) = x^{1-\gamma}z(x). \qquad (11)$$

O halde

$$y'(x) = x^{1-\gamma}z'(x) + (1-\gamma)x^{-\gamma}z(x),$$
$$y''(x) = x^{1-\gamma}z''(x) + 2(1-\gamma)x^{-\gamma}z'(x) - \gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}z(x). \quad (12)$$

(11), (12) formüllerini kullanarak verilen denklemi değiştirelim:

$$x(1-x)z''(x) + \{-(2-\gamma) + [1 + (a+1-\gamma) + (b+1-\gamma)x]\}z'(x) + (a+1-\gamma)(b+1-\gamma)z(x) = 0 \; (13)$$

(13) Hipergeometrik denklem parametreleri olarak $a+1-\gamma, b+1-\gamma, 2-\gamma$ sayıları alınır. (13) denkleminin çözümü Hipergeometrik seri şeklinde gözükür ve $z(x) = {}_2F_1(a+1-\gamma, b+1-\gamma, 2-\gamma, x)$ Hipergeometrik fonksiyonu (13) denklemin çözümü olur. (11) formül cinsinden verilen denklemin ikinci çözümüne sahip oluruz.

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}{}_2F_1\left(a+1-\gamma,\ b+1-\gamma, 2-\gamma,\ x\right). \qquad (14)$$

yani, $|x| < 1$ ve γ-negatif sayı olmadığı durumda (8) ve (14) formülleri cinsinden verilen çözümü elde ederiz.

$$y(x) = c_1{}_2F_1\left(a,\ b, \gamma,\ x\right) + c_2 x^{1-\gamma}{}_2F_1\left(a+1-\gamma,\ b+1-\gamma, 2-\gamma,\ x\right), \qquad (15)$$

burada $c_1,\ c_2$-sabit sayılar, ${}_2F_1\left(a,\ b, \gamma,\ x\right)$, ${}_2F_1\left(a+1-\gamma,\ b+1-\gamma, 2-\gamma,\ x\right)$ ise Hipergeometrik fonksiyonlardır.

Örmek 2: $x(1-x)y'' + \left[-\gamma - (a+b+1\ )x\right]y' - aby = 0$ denkleminin $x = 1$ noktasında $a+b+1-\gamma$-negatif sayı olmadığı durumda çözümünü bulalım.

Çözüm: Eğer $x = 1 - t$ yerine koyma yoluyla sabit büyümeyi değiştirecek olursak; o halde $x = 1$ noktası $t = 0$ noktasına geçer verilen denklem aşağıdaki gibi değişir:

$$t(t-1)y'' + \left[-(a+b+1-\gamma) + (a+b+1)t\right]y' + aby = 0. \qquad (16)$$

İfadedeki denklemin $\lambda = 0$ çözümüne denk gelen (16). denklem çözümün derece cinsindeki seri şeklinde hesaplayalım.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k . \qquad (17)$$

(17) formülündeki c_k büyüklüğün değerini bulmak için (4). formülde verilen denklemi yerine koyalım .

$$t(t-1)\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)t^{k-2} + \left[-(a+b+1-\gamma) + (a+b+1)t\right]\sum_{k=2}^{\infty} c_k k t^{k-1} + ab\sum_{k=2}^{\infty} c_k t^k = 0.$$

(18)

t nin eşit derecedeki kat sayılarını sıfıra eşitleyerek , c_k ye göre denklemini elde etmiş

$$k(k-1)c_k - k(k+1)c_{k+1} - (a+b+1-\gamma)(k+1)c_{k+1} - (a+b+1)kc_k - abc_k = 0,$$

oluruz. $$c_{k+1} = \frac{k(k-1) + (a+b+1)k - ab}{(k+a+b+1-\gamma)(k+1)}c_k = \frac{(a+k)(k-b)}{(k+a+b+1-\gamma)(k+1)}c_k,$$

$k = 0, 1, 2, ...$

(19)

$c_0 = 1$ diye kabul edersek c_k nin kalan değerlerin yan yana bulabiliriz.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{ab}{a+b+1-\gamma}, \\
c_2 &= \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!(a+b+1-\gamma)(2+a+b-\gamma)}, \\
c_3 &= \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!(a+b+1-\gamma)(2+a+b-\gamma)(3+a+b-\gamma)},... \\
c_k &= \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!(a+b+1-\gamma)(2+a+b-\gamma)(3+a+b-\gamma)...(k+a+b-\gamma)},... \quad .
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Dolayısıyla, aradığımız $y_1(t)$ çözümü aşağıdaki gibi yazılır

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!(a+b+1-\gamma)(2+a+b-\gamma)(3+a+b-\gamma)...(k+a+b-\gamma)} t^k .$$

(21)

(21) çözümündeki seri Hipergeometrik seri denir ve $|t| < 1$ olunca toplama serisi olur,ve toplamı Hipergeometrik fonksiyon denir

$${}_2F_1(a,b,a+b+1-\gamma,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!(a+b+1-\gamma)(2+a+b-\gamma)(3+a+b-\gamma)...(k+a+b-\gamma)} t^k$$

(22)

denklemin $y_1(t)$ çözümüyle lineer bağımsız çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$y_2(t) = t^{\gamma-a-b} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k . \qquad (23)$$

Verilen denklemdeki aranan fonksiyonu yeni fonksiyonla değiştirerek ;

$$y(t) = t^{\gamma-a-b} z(t). \qquad (24)$$

O halde denklemin çözümü Hipergeometrik seri şeklinde gözükür ve $z(t) = {}_2F_1(\gamma-b,\ \gamma-a, \gamma+1-a-b, t)$ Hipergeometrik fonksiyonu (24) formülüyle elde edilen denklem çözüme ulaşır. (24) formülü cinsinden ikinci çözümünü elde ederiz.

$$y_2(t) = t^{\gamma-a-b} {}_2F_1(\gamma-b,\ \gamma-a, \gamma+1-a-b, t). \qquad (25)$$

Dolayısıyla , $|t| < 1$ ve $a+b+1-\gamma$-negatif sayı olmadığı durumda (21) ve (25) formülleriyle (16) denklemin çözümüne ulaşırız.

$$y(t)=c_1\ {}_2F_1(a,b,a+b+1-\gamma,t)+c_2t^{\gamma-a-b}{}_2F_1\left(\gamma-b,\ \gamma-a,\gamma+1-a-b,t\right), \qquad (26)$$

burada c_1, c_2 -sabit sayılar,

${}_2F_1(a,b,a+b+1-\gamma,t)$, $t^{\gamma-a-b}{}_2F_1\left(\gamma-b,\ \gamma-a,\gamma+1-a-b,t\right)$ Hipergeometrik fonksiyonlar.

yani $x=1-t$ yerine koymayı hatırlarsak (21) ve (25) formülleri yardımıyle verilen denklemin $x=1$ noktasındaki lineer bağımsız çözümlerine sahip oluruz

$$y_1(x)={}_2F_1(a,b,a+b+1-\gamma,1-x),$$

$$y_2(x)=(1-x)^{\gamma-a-b}{}_2F_1\left(\gamma-b,\ \gamma-a,\gamma+1-a-b,\ 1-x\right). \qquad (27)$$

3. Temel Hipergeometrik Serisi

Açıklama: Eğer c_{n+1}/c_n ifadesi her hengi bir sabit q parametresini n.ci dereceden bağımlı rasyonel fonksiyonu ise , o halde $\sum c_n$ -serisi Temel Hipergeometrik Serisi denir

Temel Hipergeometrik Serisi için q – binom teoremi aşağıdaki gibi yazılır;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)_n}{(q,q)_n} x^n = \frac{(ax,q)_\infty}{(x,q)_\infty}, \quad |x| < 1 \ . \qquad (1)$$

Genel kabul görülen işareti hatırlayacak olursak, o halde

$$(a,q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n). \qquad (2)$$

ve

$$(a,q)_n = \frac{(a,q)_\infty}{(aq^n,q)_\infty}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (3)$$

Aşağıdaki gibi seriyi toplamalı Hipergeometrik serinin örneği gibi bakabiliriz:

$$_{p+1}\varphi_{p+r}\left[\begin{matrix} a_0,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_{p+r} \end{matrix}, \quad q, \quad x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_0,q)_n \ \ldots \ (a_p,q)_n \ (-1)^{rn} q^{r(n^2-n)/2}}{(b_1,q)_n \ldots (b_{p+r},q)_n (q,q)_n} x^n. \qquad (4)$$

(4) serisine benzer iki taraflı seri de toplamalı Hipergeometrik seri şeklinde kullanılır.

$$_{p}\psi_{p+r}\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_{p+r} \end{matrix}, \quad q, \quad x\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(a_1,q)_n \ \ldots \ (a_p,q)_n \ (-1)^{rn} q^{r(n^2-n)/2}}{(b_1,q)_n \ldots (b_{p+r},q)_n} x^n. \qquad (5)$$

Şimdi q- binom teoremini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$_{1}\varphi_{0}\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; \ q, \quad x\right] = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}, \quad |x| < 1. \qquad (6)$$

XVIII asırda L. Euler $_{1}\varphi_{0}\left[\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}; q, \quad x\right]$, $_{1}\varphi_{1}\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}; q, \quad x\right]$ fonksiyonlarını böyle tanımlamıştır.

$${}_1\varphi_0\left[\begin{matrix}0\\ -\end{matrix};\ q,\quad x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(x;q)_\infty}, \qquad (7)$$

$${}_1\varphi_1\left[\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix};\ q,\quad x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{(n^2-n)/2}x^n}{(q;q)_n}=(x;q)_\infty . \quad (8)$$

Ve aynı zamanda , Euler aşağıdaki ifadeyi bulmuştur.

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}=(q;q)_\infty . \qquad (9)$$

Eulerin (9) kuralındaki ifadeyi Gauss devam ettirerek aşağıdaki sonuca ulaşmıştır.

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n^2-n)/2}x^n=(q;q)_\infty (x;q)_\infty \left({}^{q}\!/_{x} ;q\right)_\infty . \quad (10)$$

Geyne q –binom teoremini tekrar açarak ${}_2\varphi_1$ fonksiyonuna ilave etmiştir. Çalişmasında Gauss kurallarını sonuçlamıştır, dolayısıyla aynı tipteki kesintisiz denklemler için iki ayrımı tanımlamıştır .

$${}_2\varphi_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};\ q,\quad x\right]=\frac{(ax;q)_\infty (b;q)_\infty}{(x;q)_\infty (c;q)_\infty}\ {}_2\varphi_1\left[\begin{matrix}c/b,x\\ ax\end{matrix};\ q,\quad b\right] \qquad (11)$$

$${}_2\varphi_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};\ q,\quad x\right]=\frac{(\frac{abx}{c};q)_\infty}{(x;q)_\infty}\ {}_2\varphi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\ c\end{matrix};\ q,\frac{abx}{c}\right] \qquad (12)$$

${}_2F_1$ fonksiyonu için q değişken sonucunu bulmakla denklemin bazı çözümlerini de ilave etmiştir.

Tome (11) formülünü değiştirerek tam integralın q toplamasını veya sonucunu (13) formülü cinsinden tanımlamıştır.

$$\int_0^a f(t)d_q t=a(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n . \qquad (13)$$

Bu durumda $0<q<1$.

Tome (aq^{n+1},aq^n) aralığında $a(q^n-q^{n+1})$ ağırlığı aynı değerde bölünen halinde ise; $[0,a]$ kesintisindeki sabit miktarı diskret miktarına değiştirmeyi sunmuştur. O halde q –binom teoreminin aşağıdaki gibi yazılımı mümkündür.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}x^n=\frac{(ax;q)_\infty(q;q)_\infty}{(x;q)_\infty(a;q)_\infty}. \qquad (14)$$

Devamında $n!$ nin q-sonucu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$n!_q=1(1+q)...(1+q+...+q^{n-1})=(q;q)_n(1-q)^{-n}. \qquad (15)$$

(2). formülü kullanarak Gamma Fonksiyonu için (15) .formülünü sonuclandıralım.

$$\Gamma_q(n+1)=n!_q=\frac{(q;q)_\infty}{(q^{n+1};q)_\infty}(1-q)^{-n}$$

veya

$$\Gamma_q(x)=n!_q=\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x} \qquad (16)$$

Dolayısıyla, q integralın kullanarak ve a yı q^β, x i q^a değiştirerek (14). formülü tekrar kuralım.

$$\int_0^1\frac{t^{a-1}(tq;q)_\infty}{(tq^\beta;q)_\infty}d_qt=\frac{\Gamma_q(a)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(a+\beta)}, \qquad (17)$$

(17) formülü Euler integralinin q -sonucun gösterir.

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}.$$

Geynenin ilk değişim tanımı, veya (11) formülü aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\cdot\,{}_2\varphi_1\left[\begin{matrix}q^a,q^\chi\\ q^\gamma\end{matrix};q,\quad x\right]=\frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\int_0^1\frac{(q^axt;q)_\infty}{(xt;q)_\infty}\frac{(tq;q)_\infty}{(tq^{\gamma-\beta};q)_\infty}t^{\beta-1}d_qt, \qquad (18)$$

Ve bu Eulerin integral cinsinden q açıklaması olur.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right]=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1(1-xt)^{-a}t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt. \qquad (19)$$

Tomenin çalışmalarından haberi olmayan Rodjes Geyne değişimleri anlatmaya çalışmıştır. Parçalı interpretasyonları bulmakla yeni fonksiyonları tanımlayarak en önemli eşitliğe sahip olmuştur. Eşitliklerin içerisindeki (20) ve (21) formülleri yardımıyla açıklanan eşitlikler kısa sürede çalışma kapsamına alınmıştır.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty} \qquad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}. \qquad (21)$$

Rodjersin önemli formüllerinin birinde duracak olursak. $C_n(x;b\,|\,q)$ polinom kümelerini açıklayalım.

$$\begin{aligned} &2x(1-bq^n)C_n(x;b/q) = (1-q^{n+1})C_{n+1}(x;b/q) + (1-b^2q^{n-1})C_{n-1}(x;b/q), \\ &C_0(x;b/q) = 1, \quad C_1(x;b/q) = 2x(1-b)(1-q)^{-1}. \end{aligned} \qquad (22)$$

O haldeRodjersin formülüne sahip oluruz

$$C_n(x;b\,|\,q)C_m(x;b\,|\,q) = \sum_{k=0}^{m\cap n} a(k,m,n,)C_{n+m-2k}(x;b\,|\,q), \qquad (23)$$

burada

$$a(k,n,m) = \frac{(q;q)_{m+n-2k}(b;q)_{m-k}(b;q)_k(b^2;q)_{m+n-k}(1-bq^{m+n-2k})}{(b^2;q)_{m+n-2k}(q;q)_{m-k}(q;q)_{n-k}(q;q)_k(bq;q)_{m+n-k}(1-b)}. \quad (24)$$

Eğer $m=n$ ise (23), (24) formüllerinen

$$\left[{}_4\varphi_3\left[\begin{matrix} a,b,c,\, a^2b^2/c \\ ab\sqrt{q},\, -ab, -ab\sqrt{q}, \end{matrix} ;\quad q,q\right]\right]^2 = {}_5\varphi_4\left[\begin{matrix} a^2,b^2,\, ab,\, c,\, a^2b^2/c \\ ab\sqrt{q},\, -ab, -ab\sqrt{q}, a^2b^2 \end{matrix} ;\quad q,q\right]$$

(25)

Formülü meydana geleceğini Gasper göstermiştir.

Eğer $a=q^\alpha$, $b=q^\beta, c=e^{i\theta}$ ise, o halde (25) formülüne $q\to 1$ limite giderken aşağdaki tanımı eldeederiz.

$$\left[{}_2F_1\left[\begin{matrix} \alpha,\beta \\ \alpha+\beta+1/2 \end{matrix} ;\quad t\right]\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta,\, \alpha+\beta \\ \alpha+\beta+1/2,\, 2\alpha+2\beta \end{matrix} ;\quad t\right], \qquad (26)$$

burada $2t = 1-\cos\theta$. (26) formülü parçalanabilen seriler için yer alır , ve (25) formülü parçalanabilen formüller için yer almaz.

Kaynaklar

1. Arhıpov G.İ. Matematik analiz dersi., Sayı, 1999.
2. VıgodskiyM.Y. yuksek matematik sözlüğü, Sayı 1963.
3. Djekson Fourier Serisi ve Ortogonal Polinomları 1948.
4. İlyin B.A., Poznyak E.G. Matematik analizler temeli. M., Sayı, 1973.
5. Kleyn F. XIX yy Matematik gelişimleri Sayı, 1974.
6. Lebedev N Özel fonksiyonlar ve kullanımları. 1963.
7. Nikifiriv L.F . Uvarov V.B. Fonksiyonların Özel Teorileri 1963.
8. Olver F. Asimptotlar ve Özel Fonksiyonlar Sayı, 1990.
9. Romaovskiy P.İ. Fourier Serisi. Alan teorisi. Analitik ve Özel Fonksiyonlar. Laplas Transferi. Fiz-mat Literatur 1961.
10. Sımirnov V.İ.Yüksek matematik kursu T. I. M., Sayı, 1974.
11. Uitteker,Vatson. Yeni analiz Kursu cilt 1,2
12. Fihtengold. Diferensiyal ve İntegral hesapları kursu