

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ FEN
BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

İMPULS FONKSİYONLARI İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ
VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedat YANIK

BİŞKEK-2011

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ FEN
BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

İMPULS FONKSİYONLARI İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ
VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedat YANIK

Tez Danışmanı

Prof.Dr.Ramiz RAFATOV

BİŞKEK-2011

İntihal Yapılmadığını Belirten İfade

Ben bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallara göre aldığımı ve sunduğumu belirtiyorum. Bu çalışmaya özgün olmadan kullandığım bütün materyal ve bilgilere akademik ve etik kurallar gereğince atıfta bulunduğumu ve hiçbir şekilde intihal yapmadığımı açıkça bildiriyorum.

İSİM, SOYAD: Sedat YANIK

İMZA:

TARİH:

Плагиат жасалбагандыгы тууралуу билдируу

Мен бул эмгекте алынган бардык маалыматтарды академиялык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум. Тагыраак айтканда бул эмгекте колдонулган бирок мага тишелүү болбогон маалыматтардын бардыгын тиркееде так көрсөттүм жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

АТЫ, ЖӨНҮ: Седат ЯНЫК

КОЛУ:

ДАТАСЫ:

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE
MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Anabilim dalı, Matematik Bilim dalı'nda 1051Y03001 numaralı Sedat YANIK'ın hazırladığı “İmpuls Fonksiyonları İçin Laplace Dönüşümü ve Uygulamaları” konulu Yüksek Lisans ile ilgili tez savunma sınavı, ../../2011 günü ../.. saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin.....olduğuna.....ile karar verilmiştir.

Jüri Başkanı
Doç.Dr.Ümetaliev Marat
İ.Razzakov KDTÜ

Üye (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ramiz RAFATOV
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Avıt Asanov
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİYEV
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi

Üye
Öğr. Gör. Dr. Elmira ABDILDAYEVA
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi

...../...../2011

ЧЕЧИМ

Кыргыз-Түрк Манас университетинин Табигый илимдер институтунун
экзамендик инструкциясынын жобосун,.....№ жыйынында
уюшулган комиссия, математика бөлүмүнүн магистранты Седат ЯНЫК
« ИМПУЛЬС ФУНКЦИЯСЫНЫН ЛАПЛАС ЫКМАСЫНА ӨЗГӨРТҮЛҮШҮ
ЖАНА МИСАЛДАРЫ» темасында жазган магистрдик диссертацияны анализдеп,
...../...../2011 ж. саатдө жактоого кабыл алды.

Магистрантминута убакыт ичинде дипломдук магистрдик
диссертацияны жактап, комиссия.....(*көпчүлүк добуш менен/бир
добуштан*)..... (*Кабыл алынбайт/ Кабыл алынсын /Кайра оңдолсун*) деген
чечим чыгарды.

Жюри төрагасы

Т.и.к., доц. Үметалиев Марат

И. Раззаков атындагы КГТУ

Жюри мүчөсү

Ф.-м.и.д., проф. Рамиз Рафатов
Кыргыз-Түрк Манас Университети

Жюри мүчөсү

Ф.-м.и.д., проф. Авыт Асанов
Кыргыз-Түрк Манас Университети

Жюри мүчөсү

Ф.-м.и.д., проф. Асан Өмүралиев
Кыргыз-Түрк Манас Университети

Жюри мүчөсү

Др.Элмира АБДЫЛДАЕВА
Кыргыз-Түрк Манас Университети

...../...../2011

ÖZ

Yazar : Sedat YANIK
Üniversite : Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi
Anabilim Dalı : Fen Bilimleri
Bilim Dalı : Matematik
Tezin Niteliği : Yüksek Lisans Tezi
Sayfa Sayısı : IX+41
Mezuniyet Tarihi : Aralık 2011
Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ramiz RAFATOV

İMPULS FONKSİYONLARI İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI

Bu tezde ilk olarak Laplace dönüşümü genel özellikleri ve teoremleriyle birlikte tanıtılmıştır. Genel itibariyle fizik ve mühendislik problemlerinde uygulama alanı bulan İmpuls fonksiyonları incelenmiştir. Bazı impuls problemlerinin çözümü için Riemann–Stieltjes İntegraline yer verilmiş ve bu integral türünün Laplace dönüşümü verilmiştir. İmpuls fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini içeren uygulamalı örneklerle ve son olarak bu örneklerde kullanılmak üzere Laplace dönüşüm tablosuna yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Laplace fonksiyonu, Laplace dönüşümü, Ters Laplace dönüşümü, Dirac Delta fonksiyonu, İmpuls fonksiyonu, İmpuls fonksiyonunun Laplace dönüşümü.

КЫСКАЧА МАЗМУНУ

Даярдаган	: Седат ЯНЫК
Университет	: Кыргызстан-Туркия Манас Университети
Институт	: Табигий Илимдер Институту
Багыты	: Математика
Иштин сыпаты	: Магистрстура
Беттердин саны	: IX+41
Бүтүрүү датасы	: Декабрь 2011
Диссертация жетекчиси	: Проф. Док Рамиз РАФАТОВ

ИМПУЛЬС ФУНКЦИЯСЫНЫН ЛАПЛАС ЫКМАСЫНА ӨЗГӨРТҮЛҮШҮ ЖАНА МИСАЛДАРЫ

Бул изилдөөдө алгач Лапластын өзгөртүү ыкмасынын жалпы касиети жана теоремасы менен бирге танытылган. Жалпы физика жана инженердик теңдемелеринде колдонулуучу тармакты тапкан импульс функциялары изилденген. Кээ бир импульс теңдемелерин чечүүдө Римана – Ститьеса интегралга жол берилген жана интегралдан Лапласка өзгөртүлүшү да берилген. Импульс функцияларынын Лапласка өзгөрүлүшү камтылган көнүгүүлөр жана көнүгүүлөрдө колдонуу үчүн Лапласка өзгөртүү таблицасы берилген.

Ачкыч сөздөр: Лаплас функциясы. Лапласка өзгөртүүлүсү. Лапластын мурунку өзгөртүү абалы. Диракын Дельта функциясы. Импульс функциясынын Лапласка өзгөртүлүшү.

АБСТРАКТ

Автор : Седат ЯНЫК
Университет : Кыргызстан-Турция Манас Университети
Институт : Естественных Наук
Кафедра : Математика
Качество диссертации : Магистратура
Количество страниц : IX+41
Дата выпуска : Декабрь 2011
Руководитель диссертации : Проф. Док.Рамиз РАФАТОВ

ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В диссертации рассмотрены в общих чертах особенности преобразования Лапласа и теорем. Исследована функция импульса, которая нашла применение при решении задач в области физики и инженерии. В решении некоторых задач импульса использован интеграл Римана-Стилтьеса и введен этот интеграл на преобразование Лапласа. Практические примеры импульсной функции на преобразование Лапласа и использоваться в этих примерах приведена таблица Лапласа.

Ключевые слова: функции Лапласа, преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа, дельта-функция Дирака, функция Импульса, функция Импульса на преобразование Лапласа

ABSTRACT

Prepared by : Sedat YANIK
University : Kyrgyzstan-Turkey Manas University
Institute : Natural Sciences
Department : Mathematics
Thesis Level : Master Thesis
Number of Pages : IX+41
Graduate Date : December 2011
Thesis Advisor : Prof.Dr. Ramiz RAFATOV

LAPLACE TRANSFORM OF IMPULS FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

In this thesis, first of all Laplace transform is defined with its general properties and theories. Impulse functions that generally speaking finds application areas in physical and engineering problems were analysed. For the solution of some of the problems of Impulse functions, Riemann-Stieltjes Integral were given. Practical examples involving Laplace transform of Impulse functions and finally to be used in these examples Laplace transform table were given.

Keywords: Laplace function, Laplace transform, Inverse Laplace transform, Dirac Delta function, Impulse function, Laplace transform of Impulse function.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın tamamlanma süreci boyunca, yardımını ve desteğini esirgemeyen, sabırla danışmanlığımı yapan değerli hocam sayın Prof.Dr.Ramiz RAFATOV’a, samimane biçimde sorularımıza cevap veren ve yol gösteren Matematik Anabilim Dalı Başkanımız sayın Prof.Dr.Avıt ASANOV’a ve tez yazım sürecinin özellikle son aşamasında vermiş olduğu kıymetli yardımları dolayısıyla Fen Bilimler Enstitüsü Müdürümüz sayın Prof.Dr.Zafer Gönülalan’a içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca çalışma süreci boyunca her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve çalışmanın bir an önce bitirilmesi hususunda bana ivme kazandıran aileme ve değerli eşime teşekkür ederim.

Sedat YANIK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ ONAY SAYFASI.....	II
ÖZ.....	III
КЫСКАЧА МАЗМУНУ.....	IV
АБСТРАКТ.....	V
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
SİMGELER	IX
1. Laplace Dönüşümü.....	1
1.1.Doğrusallık Teoremi (Linearity Theorem).....	2
1.2.Diferansiyel Alma İle İlgili Teorem.....	2
1.3.Dönüşümün İntegral İle İspat Teoremi.....	4
1.4.Zaman Gecikim Teoremi (Time Delay Theorem).....	5
2. İmpuls Fonksiyonu.....	11
3. Riemann–Stieltjes İntegrali	17
4. Riemann–Stieltjes İntegrali İçin Laplace Dönüşümü.....	22
5. Uygulamalı Örnekler.....	23
6. Laplace Dönüşüm Tablosu.....	32
Kaynaklar.....	41

SİMGELER DİZİNİ

i	: karmaşık birim $\sqrt{-1}$
s	: kompleks değişken
L	: Laplace dönüşüm operatörü
L^{-1}	: Ters Laplace dönüşüm operatörü
$L[x(t)]$	: $x(t)$ nin Laplace dönüşümü
$\delta(t)$	: İmpuls (Dirac-Delta) fonksiyonu
$L[\delta(t)]$	: İmpuls fonksiyonunun Laplace dönüşümü
L_{R-S}	: Riemann-Stieltjes integrali için Laplace dönüşümü
$L_{R-S}[\delta(t)]$	: İmpuls fonksiyonunun Riemann-Stieltjes integrali için Laplace dönüşümü
$Y(t)$	: sistemin tepkisi

1. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$s = \beta_0 + j\phi$ karmaşık (complex) veya reel değişken, ϕ - açısal frekans, β_0 gerçel sayı ve $t > 0$ olmak üzere, Laplace Dönüşümü;

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} x(t) dt. \quad (1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada limit varsa Laplace dönüşümü de vardır. Eğer limit mevcutsa, integral yakınsak denilir. Limit mevcut değilse, integral için ıraksak denilir ve bu durumda x için tanımlı Laplace dönüşümü yoktur.

$X(s)$ Laplace fonksiyonu ve

$$X(s) = L[x(t)] \quad (2)$$

şeklinde yazılır. Burada L - Laplace dönüşüm operatörüdür.

L^{-1} ters laplace dönüşümünü ifade eder. $t \geq 0$ durumunda ancak Laplace dönüşümü elde edilir. Eğer $t < 0$ ise fonksiyon tanımsız olacağından dönüşümde yoktur. Ters Laplace dönüşümü:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}, \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer Laplace dönüşümünü impuls fonksiyonu için uygulayacak olursak

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1, \quad (4)$$

denklemini elde edilir. Çünkü $t \neq 0$ durumunda $\delta(t) = 0$ olur.

Eğer $t = 0$ ise $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ ve $e^{-st} = 1$ olur. Dolayısıyla (4). denklem

yardımları ile aşağıdaki denklem elde edilir:

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \Big|_0^{\infty} e^{-st} = -\frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st} - 1) = \frac{1}{s}. \quad (5)$$

Pratikte Laplace dönüşümü ile Ters Laplace dönüşümleri için hazır tablolar vardır. Bu tablolara bir örnek 6.Bölümde Laplace Dönüşüm Tablosu başlığında verilmiştir.

Laplace dönüşümüyle ilgili bazı önemli teoremler aşağıda sıralanmıştır.

1.1.Doğrusallık Teoremi (Linearity Theorem):

Herhangi A, B Reel veya Karmaşık sayıları için,

$$X_0(s) = AX_1(s) + BX_2(s) \Rightarrow x_0(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \quad (6)$$

eşitliği kullanılır.

İspat: İspatlamak için İntegral özelliğiyle yaklaşarsak:

$$\int_0^{\infty} (Ax(t) + Bg(t))e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ax(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} Bg(t)e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt + B \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (7)$$

teoremi ispat etmiş oluruz.

1.2.Diferansiyel Alma İle İlgili Teorem:

Eğer $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)]$ ve $X(s) = L[x(t)]$ ise,

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0). \quad (8)$$

biçiminde olur.

İspat: Teoremi ispatlamak için Laplace dönüşümüne türev olarak bakalım

$$x'(t) = \int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt. \quad (9)$$

9.denklemdedeğişken değiştirme metodunu uygularsak;

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} & du &= -se^{-st} \\ dv &= x'(t)dt & v &= x(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda,

$$\int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (10)$$

bulunur.

$x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty}$ değerini hesaplayalım. Dönüşümde $|x(t)| \leq Me^{\alpha t}$ hatırlarsak, o zaman $\text{Re } s > \alpha$ durumunda aşağıdaki değeri elde ederiz:

$$|x(t)e^{-st}| < Me^{(\alpha - \text{Re } s)t}. \quad (11)$$

Eğer $t \rightarrow \infty$ giderse, o zaman $\text{Re } s > \alpha$ ifadesiyle $|x(t)e^{-st}| < Me^{(\alpha - \text{Re } s)t} \rightarrow 0$ olur.

Dolayısıyla $x(t)e^{-st} \Big|_{t=\infty} = 0$ elde edilir.

Böylece $x(t)e^{-st} \Big|_{t=0} = x(0)$ olduęunda (10). formülden aşağıdaki gibi bir denklem elde edilir:

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt - x(0) = sX(s) - x(0). \quad (12)$$

Bu da teoremi ispat eder.

İspatlananan teoremlerin sonucuyla aşağıdaki gibi yüksek dereceden türevlerin (Higher order derivative) formülleri elde edilir.

İkinci dereceden türev için

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0), \quad (13)$$

ve n.ci derecedeki türev için

$$L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0). \quad (14)$$

şeklinde yazılır.-

1.3.Dönüşümün İntegral İle İspat Teoremi:

Eğer $x(t) \stackrel{\circ}{=} X(s)$ ve $g(t) = \int_0^t x(t)dt$ olursa, o halde

$$L\{g(t)\} = \frac{1}{s} X(s). \quad (15)$$

olur.

İspat: Öncelikle $g'(t) = x(t)$, ve $g(0) = 0$ alalım. $g(t)$ fonksiyonunun ifadesiyle $G(s)$ yi aşağıdaki gibi belirlenir.

$$g(t) \stackrel{\circ}{=} G(s). \quad (16)$$

(16) formülünün Diferansiyelini alarak;

$$g'(t) \stackrel{\circ}{=} sG(s) - g(0) = sG(s). \quad (17)$$

elde edilir.

Eğer $g'(t) = x(t)$ olduğunu hatırlanırsa, o halde (17). formül ile aşağıdaki formülü elde edilir:

$$sG(s) = X(s) \text{ ve } G(s) = \frac{1}{s} X(s). \quad (18)$$

Yani

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{1}{s} X(s).$$

olur ki böylece teorem ispat edilmiş olur.

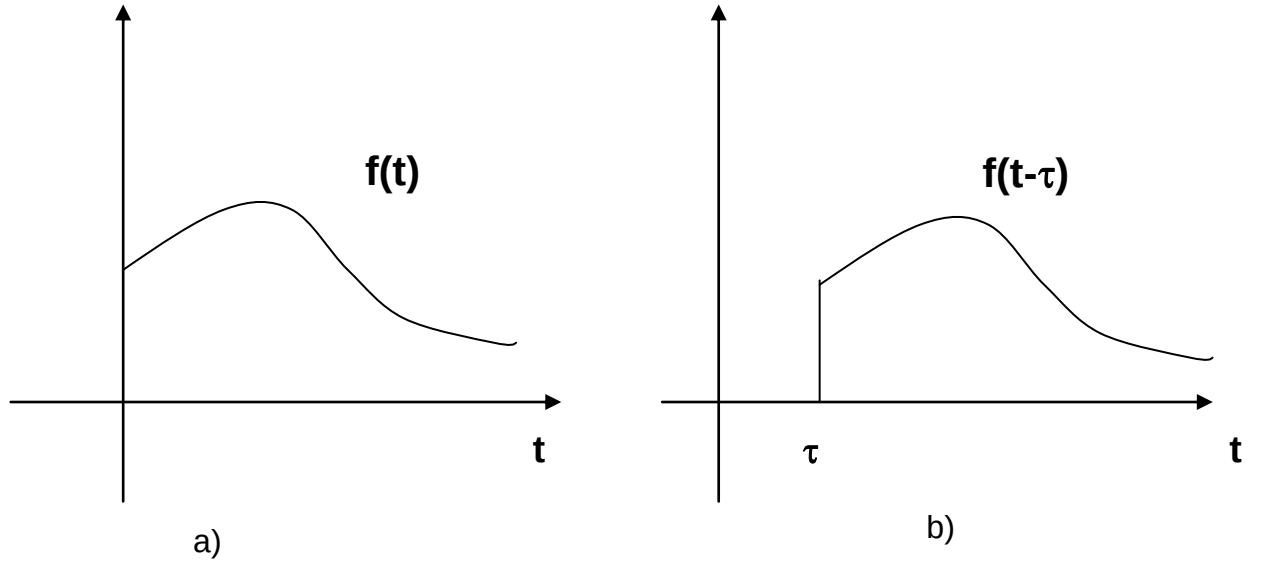
1.4.Zaman Gecikim Teoremi (Time Delay Theorem):

Eğer $\tau > 0$ ise, aşağıdaki denklemi yazılabilir.

$$L[x(t - \tau)] = e^{-s\tau} L[x(t)] = e^{-s\tau} X(s). \quad (19)$$

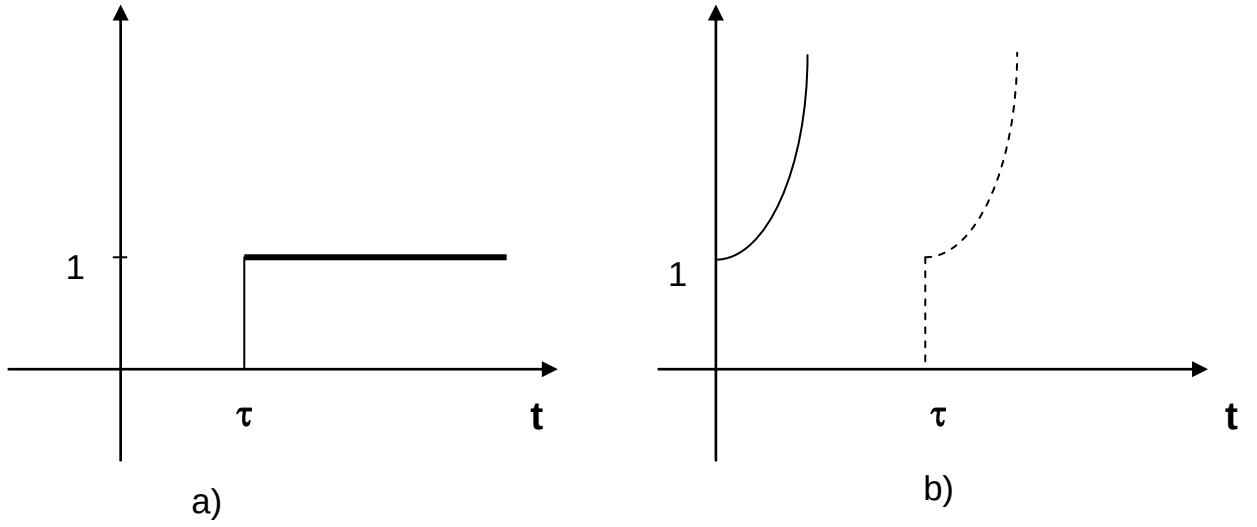
Bu teorem yardımıyla önemli pratik değerleri içeren impuls fonksiyonları gibi fonksiyonlar ifade edilebilir.

$f(t)$ fonksiyonun grafiği aşağıda Şekil 1.1.a) da gösterilmiştir. $f(t - \tau)$ Fonksiyonun grafiği $f(t)$ Fonksiyonun grafiğine göre τ mesafe kadar kaydırılmıştır. Bununla beraber $(0, \tau)$ aralığındaki fonksiyonun grafiği O_t odağına denk gelir. $f(t - \tau)$ fonksiyonun grafiği aşağıda Şekil 1.1.b) de gösterilmiştir. Dolayısıyla $f(t - \tau)$ fonksiyon yardımıyla ifade edilen işlem, $f(t)$ fonksiyonu ile gösterilen işleme göre τ zamanı kadar geç başladığı anlamına gelir.



Şekil 1.1.

Eğer $h(t) = 1$ birim fonksiyon (unit function) ise, o halde $h(t - \tau)$ fonksiyonun grafiği şekil 1.2.a) daki gibi olur. $f(t) = e^t$ ise, o zaman $f(t - \tau) = e^{t-\tau}$ olur. $f(t) = e^t$ fonksiyonun grafiği şekil 1.2.b) de kesiksiz çizgilerle, diğer taraftan $f(t - \tau) = e^{t-\tau}$ fonksiyonun grafiği Şekil 1.2.b) de kesik çizgilerle gösterilmiştir



Şekil 1.2

İspat: Eğer $x(t - \tau)$ fonksiyonu $(0, \tau)$ aralığında sıfıra eşit olduğu hatırlanırsa,

$$x(t - \tau) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt = \int_{\tau}^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt \quad (20)$$

ve aşağıdaki gibi yerine koyma işlemiyle;

$$t - \tau = t_1, \quad (21)$$

$$x(t - \tau) = \int_{\tau}^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(t_1) e^{-s(t_1 + \tau)} dt_1 = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} x(t_1) e^{-st_1} dt_1. \quad (22)$$

elde edilir.

(1).denklemini kullanarak, (22). denklemden

$$x(t - \tau) = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} x(t_1) e^{-st_1} dt_1 = e^{-s\tau} X(s) \quad (23)$$

denklemini elde edilir.

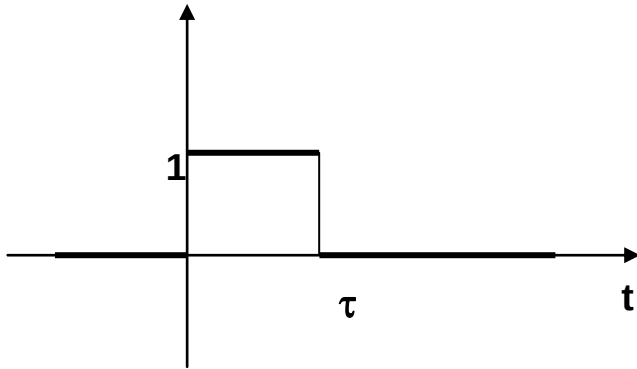
Yani

$$L[x(t - \tau)] = e^{-s\tau} L[x(t)] = e^{-s\tau} X(s).$$

eşitliği bulunur. Bu da teoremi ispat eder.

Bu teoremle ilgili $h(t-\tau)$ fonksiyonun ifade edilişi $\frac{1}{s}e^{-s\tau}$ fonksiyonu, ve fonksiyonun ifade edilişi $\frac{1}{s-1}e^{-s\tau}$ fonksiyonu olur.

Şimdi de bu teoremi τ zaman içerisinde etki eden birim impuls (unit impulse) fonksiyonu ifade etmek için kullanalım.



Şekil 1.3

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases} \quad (24)$$

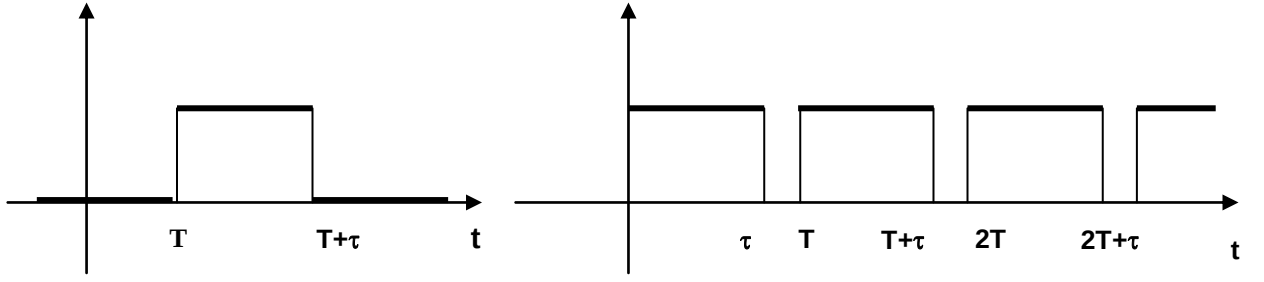
Elde edilen fonksiyonu iki çeşit denklem olarak ifade edebiliriz:

$$\text{a). } h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad \text{b). } h(t-\tau) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}. \quad (25)$$

$h(t)$ fonksiyonunun ifadesine $\frac{1}{s}$ ve $h(t-\tau)$ fonksiyonunun ifadesine

$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$ yazarak doğrusallık teoremiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$I(t) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s\tau} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau}). \quad (26)$$



Şekil 1.4

Şimdi de τ zaman biriminde etki gösteren darbe $t = 0$ zamanında değil de $t = T$ zamanında başlasın diyelim. Teoremi de fonksiyonu bulmak için kullanalım. Elde edilen fonksiyon iki çeşit denklem olarak ifade edilebilir:

$$\text{a). } h(t-T) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T \\ 1, & t > T \end{cases}, \quad \text{b). } h(t-(T+\tau)) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T+\tau \\ 1, & t > T+\tau \end{cases}. \quad (27)$$

$h(t-T)$ fonksiyonun ifadesi $\frac{1}{s}e^{-sT}$ ve $h(t-(T+\tau))$ fonksiyonun ifadesi de $\frac{1}{s}e^{-s(T+\tau)}$

olur. Ve sonuçta doğruluk teoremin kullanarak aşağıdaki teoremi bulunur:

$$I_1(t) = \frac{1}{s}e^{-sT} - \frac{1}{s}e^{-s(T+\tau)} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})e^{-sT}. \quad (28)$$

Bize zamana göre darbeleri bir sistem verildi diyelim. Bu sisteme zamanın nT anında başlayan darbelerin toplamı olarak bakabiliriz. Zaman birimi τ kadar uzayacak. Dolayısıyla gecikme ve doğruluk teoremi tabanlı aşağıdaki gibi bir denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau}) + \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})e^{-sT} + \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})e^{-2sT} + \dots + \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})e^{-nsT} = \\ &= \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots + e^{-nsT}) = \frac{1}{s} \frac{(1 - e^{-s\tau})}{(1 - e^{-sT})}. \end{aligned} \quad (29)$$

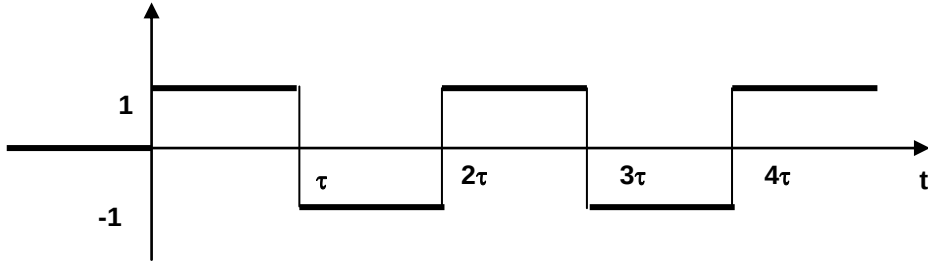
Zamanla, eğer $T = 2\tau$ olursa, bu durumda (29).denklem basit bir forma dönüşür:

$$I_3(t) = \frac{1}{s(1 + e^{-s\tau})}. \quad (30)$$

Birinci darbe $t = 0$ anında değil de $t = \tau$ anında başlarsa, (30).denklem e^{-st} ile çarpılarak;

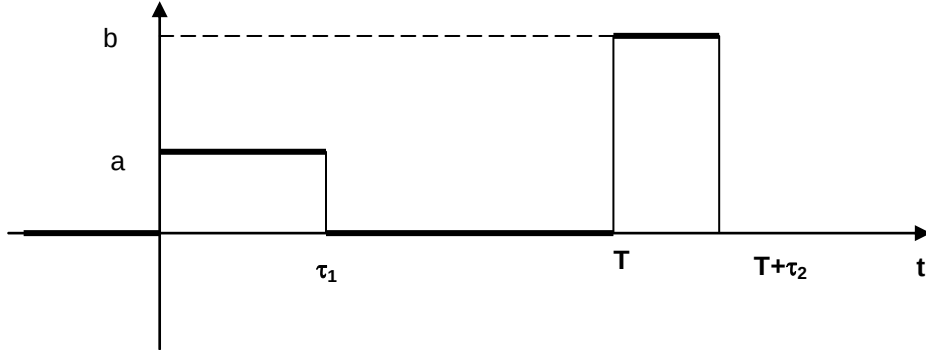
$$\frac{e^{-s\tau}}{s(1+e^{-s\tau})} = \frac{1}{s(1+e^{s\tau})}. \quad (31)$$

ifadesi elde edilir.



Şekil 1.5

Darbe boyları her zaman aynı olması mümkün değildir. Eğer darbe fonksiyonu $\frac{a}{s}(1-e^{-s\tau_1}) + \frac{b}{s}(1-e^{-s\tau_2})e^{-sT}$ ile tanımlanırsa, işlemin grafiği aşağıdaki gibi olur.

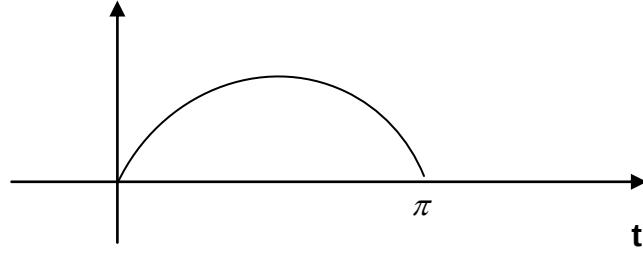


Şekil 1.6

Yukarıdaki işlemler gibi Sinüzoid sinyallerin ifadelerini de elde edebiliriz.

Bunun için fonksiyona iki şekilde bakabiliriz : $\sin t$, $\sin(t-\pi)$. Eğer $\sin wt = \frac{w}{s^2 + w^2}$ formülünü ve gecikme zaman teoremini kullanırsak aşağıdaki denkleme ulaşırız:

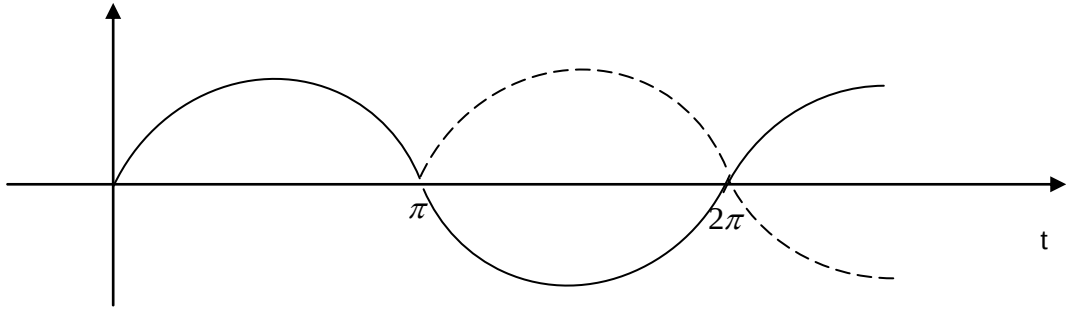
$$x(t) = \frac{1}{s^2 + 1}(1 + e^{-s\pi}). \quad (32)$$



Şekil 1.7

Sinüzoid sinyal (impuls,darbe) $t = 0$ anında değil de $t = T$ anında başlarsa, bu tür bir sinyal (darbe) aşağıdaki tanımla ifade edilir:

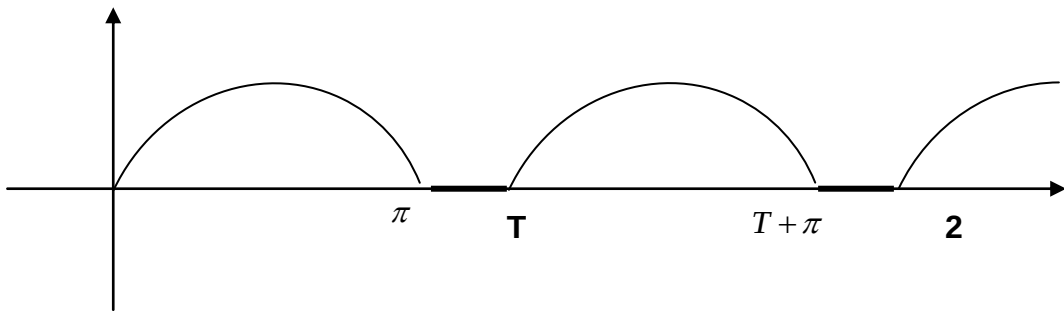
$$x(t) = \frac{1}{s^2 + 1} (1 + e^{-s\pi}) e^{-sT}. \quad (33)$$



Şekil 1.8

Ve aynı zamanda Sinüzoid sinyalin dalga şekli zaman grafiğiyle bulunabilir.

$$\frac{1}{s^2 + 1} (1 - e^{-s\pi}) (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots + e^{-nsT}) = \frac{1 + e^{-s\pi}}{(s^2 + 1)(1 - e^{-sT})}. \quad (34)$$

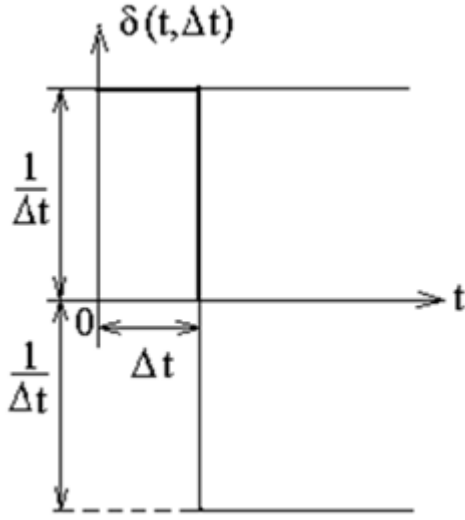


Şekil 1.9

(Kaynak: Armanoviç 190-333)

2. İMPULS FONKSİYONU

Alanı $S = 1$, yüksekliği $1 / \Delta t$ ve zaman aralığı Δt olan dikdörtgen impulsu (darbe) tanımlayan fonksiyonu ele alalım (Şek. 1) .



Şekil 2.1.

$$\delta(t, \Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{eger } t < 0 \text{ ve } t > \Delta t \\ \frac{1}{\Delta t} & \text{eger } 0 < t < \Delta t \end{cases}$$

İmpulsun uzaklığına göre komşu ve karşı iki fonksiyonun yardımıyla dikdörtgen impulsu:

$$\delta(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} 1(t) - \frac{1}{\Delta t} 1(t - \Delta t) = \frac{1(t) - 1(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (1)$$

elde edilir.

Dikdörtgen impulsun limitine bakalım. Eğer impulsun uzaklığı sıfıra ($\Delta t \rightarrow 0$), ve yüksekliği sonsuza ($A = 1/\Delta t \rightarrow \infty$) doğru giderse, aşağıdaki gibi bir denklemle karşılaşılır:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\delta(t, \Delta t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \Delta t)}{\Delta t} = \delta(t) \quad (2)$$

Limiti olan bu fonksiyona impuls fonksiyonu denir ve $\delta(t)$ ile gösterilir. Çoğu zaman buna Delta fonksiyonu veya Dirac fonksiyonu da denir

İmpuls fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1) $t < 0$ ve $t > 0$ olunca fonksiyon sifıra eşit yani $t \neq 0$ iken $\delta(t) = 0$
- 2) $t=0$ noktasında fonksiyonun değeri sonsuza eşit yani $\delta(0)=\infty$.

Bunun yanında

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3)$$

(3) formülü birim fonksiyonu ile delta fonksiyon arasındaki bağıntıyı ifade eder ve delta fonksiyonun temel özelliği diye tanımlanır.

Eğer impuls τ zamanı kadar geç kalırsa yani impuls fonksiyonu $t = 0$ anında değil de τ anında sıfırdan farklı bir zamanda olsa, bu durumda impuls geciken impuls ifadesiyle $\delta(t - \tau)$ yazılır. Ve hala impuls fonksiyonun temel özelliği değişmeden kalarak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad (4)$$

biçiminde yazılır.

İmpuls fonksiyonu birim fonksiyonunun limiti ile elde edildiği için impuls fonksiyonu birim fonksiyonun türevine eşit olur:

$$\delta(t) = 1'(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad (5)$$

(5).denklemden ters tanım da elde edilir:

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad (6)$$

Delta fonksiyonun en önemli özelliği olarak aşağıdaki ifade gösterilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \text{ ve } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \quad (7)$$

Burada $f(t)$ – bağımsız süreksiz bir fonksiyondur.

$f(t)\delta(t-\tau)$ fonksiyonun $t = \tau$ noktası haricinde diğer tüm noktalarda değeri sıfıra eşittir. $f(t)$ fonksiyonu $t = \tau$ noktasında $f(\tau)$ ye eşittir. O halde $f(\tau)$ fonksiyonunu integralin dışına alabiliriz. İmpuls fonksiyonun özelliği nedeniyle integral değeri bire eşit olur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$

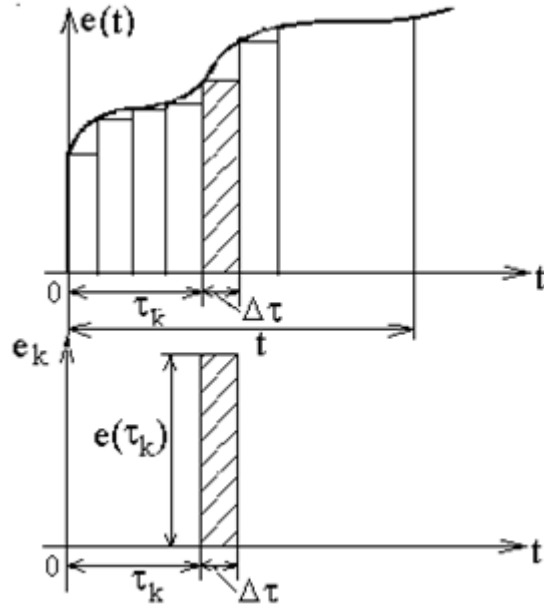
İmpuls etkisi altında sistemin delta fonksiyonunu verme reaksiyonu sonucuna impuls ifadesi denir. 8.ci denklem gibi yazılabilir

$$g(t) = \frac{Y(t)}{S}, \quad (8)$$

Burada $S = \delta(t)$ - impuls etkisi, $Y(t)$ - sistemin tepkisidir.

Eğer impuls etkisi ne kadar artarsa doğrusallık (linearity) nedeniyle sistemin tepkisi de o kadar artar. Eğer impuls etkisi τ -zamanı kadar gecikirse, o halde sistemin zamanı da τ -kadar gecikir.

Kuvvetli Elektrik zincirinin verdiği etkiyi hesaplamak için impuls ifadesin kullanalım. Öncelikle $e(t)$ gerilimin etkisiyle Elektrik zinciri üzerindeki meydana gelen akımı bulalım(Şek. 2.).



Şekil 2.2.

$$e_k(t) = e(\tau_k) [1(t - \tau_k) - 1(t - \tau_k - \Delta\tau)] = e(\tau_k) \Delta\tau \frac{1(t - \tau_k) - 1(t - \tau_{k+1})}{\Delta\tau}$$

Burada $\tau_k = k \cdot \Delta\tau$, $\Delta\tau \rightarrow 0$ dir.
 $e_k(t) = e(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$

Alanı $e(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$ -ye eşit her bir impuls dikdörtgeni zincir üzerinde akımın meydana gelişini ifade eder. Yani

$$di_k(t) = e(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (9)$$

Burada $g(t - \tau)$ - fonksiyonu, τ anında zincir üzerine impuls etkisi verince , t yakalama anındaki impuls ifadesinin değeridir.

Sonsuz küçük $di(t)$ tanımlarının toplama prensibiyle aşağıdaki formül elde edilir:

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (10)$$

İntegralin sonucuna Superpozisyon integrali denir.

Zincirin birim fonksiyonuna olan etki $h(t)$ ile gösterilir . Yukarıda impuls fonksiyonunu elde etmek için birim fonksiyonun türevini alarak 11.ci denklem elde edilir:

$$\delta(t) = 1'(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad (11)$$

$h(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları aynı zinciri ifade ettiğinden dolayı bunlar kendi aralarında sağlam bağ oluşturur . Çünkü

$$g(t) = h'(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (12)$$

Zincirdeki gerilim $E_m 1(t)$ kesintisi olunca yardımcı $g(t)$ ve $h(t)$ arasındaki bağıntı bulunabilir. Ve zincirin etkisi;

$$i(t) = E_m h(t) \quad (13)$$

olur.

Diğer taraftan

$$i(t) = \int_0^t E_m (t - \tau) g(\tau) d\tau = E_m \int_0^t g(\tau) d\tau . \quad (14)$$

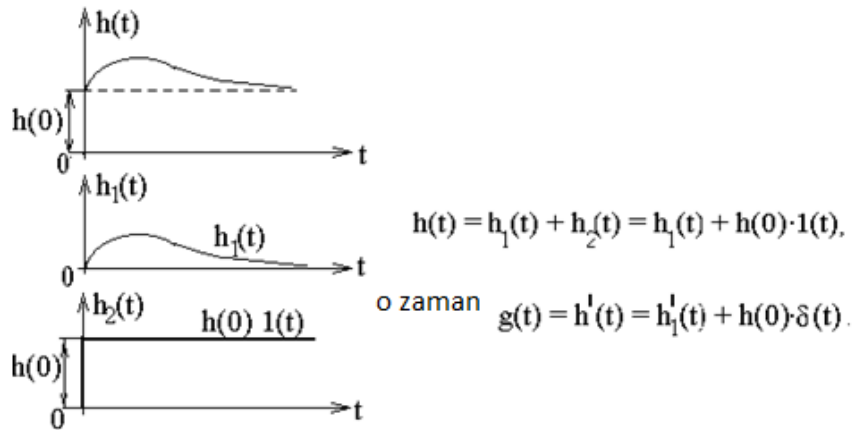
yazılır.

Buradan

$$h'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(\tau) d\tau \right) = g(t) . \quad (15)$$

elde edilir.

Eğer önceki ifadede $t = 0$ olurca ifade sıfıra eşit değilse, bu durumda $h(t)$ ile İmpuls tanımı $g(t)$ arasındaki farkı bulabiliriz. Bu işlem aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 2.3.

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = h_1(t) + h(0)i(t). \quad (16)$$

İmpuls ifadesi

$$g(t) = h'(t) = h_1'(t) + h(0)\delta(t). \quad (17)$$

Geçici hali olan $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ fonksiyonlarının toplamı ile değiştirerek $t = 0$ durumunda $h(0)$ atlama büyüklüğü hatırlanırsa, o zaman İmpuls ifadesini elde ederiz. Çünkü $h(t)$ ve $h_1(t)$ fonksiyonlarının türevi $t = 0$ noktası hariç her yerde eşittir.

(17). denklem (10). formül yardımıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$i(t) = \int_0^t e(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t e(t-\tau)h'(\tau)d\tau + h(0)\int_0^t e(t-\tau)\delta(\tau)d\tau \quad (18)$$

Delta fonksiyonuyla

$$\int_0^t e(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = e(t) \quad (19)$$

denklemini yazılır.

O halde

$$\int_0^t e(t-\tau)g(\tau)d\tau = e(t)h(0) + \int_0^t e(t-\tau)h'(\tau)d\tau \quad (20)$$

olur.

Dolayısıyla

$$e(0)h(t) + \int_0^t e'(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t)h(0) + \int_0^t e(t-\tau)h'(\tau)d\tau \quad (21)$$

elde edilir.

Burada, $e(0)h(t) + \int_0^t e'(\tau)h(t-\tau)d\tau$ - Duamel integralidir.

$e(t)h(0) + \int_0^t e(t-\tau)h'(\tau)d\tau$ ise Superpozisyon integralidir.

(Kaynak: G.Deç 80-120)

3. RIEMANN-STIELTJES İNTEGRALI

$[\alpha, \beta]$ aralığının $(\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta)$ bir bölümünü düşünelim. Her $[t_{i-1}, t_i]$ alt aralığından rastgele bir x_i noktası $t_{i-1} \leq x_i \leq t_i$ olacak şekilde seçelim. $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı f ve φ fonksiyonları için

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] \quad (1)$$

ifadesini oluşturabiliriz.

Eğer bu toplamalar $\Delta = \max_i (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$ durumlarında ve her $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ için sonlu bir limit olan L 'ye yakınsar ise, bu durumda bu limite f 'nin $[\alpha, \beta]$ aralığında φ 'ye bağlı “Riemann-Stieltjes İntegrali” denir ve L nin değeri için

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) d\varphi(t)$$

ifadesi yazılır.

Eğer $\varphi(t) = t$ ise, bu durumda (1) deki bütün toplamalar bildiğimiz Riemann toplamalarıdır ve böylece adi Riemann İntegrali elde edilir.

Teorem:

- i. Eğer $\int_a^b f d\varphi_1$ ve $\int_a^b f d\varphi_2$ integrallerinin her ikisi de mevcut ve $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ise bu durumda f (Riemann-Stieltjes) φ 'ye göre integrallenebilir ve

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f d\varphi_1 + \int_a^b f d\varphi_2 .$$

- ii. Eğer $\int_a^b f_1 d\varphi$ ve $\int_a^b f_2 d\varphi$ integrallerinin her ikisi de mevcut ve $f = f_1 + f_2$ ise, bu durumda f φ 'ye göre integrallenebilir ve

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f_1 d\varphi + \int_a^b f_2 d\varphi .$$

- iii. Eğer $\int_a^b f d\varphi$ mevcut ise, bu durumda herhangi bir c sabiti için

$$\int_a^b (cf) d\varphi = c \int_a^b f d\varphi .$$

- iv. Eğer $a < c < b$ için $\int_a^c f d\varphi$ ve $\int_c^b f d\varphi$ integrallerinin her ikisi de mevcut ise, bu durumda $\int_a^b f d\varphi$ integrali de mevcuttur ve

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^c f d\varphi + \int_c^b f d\varphi .$$

*Bu teoremin ispatları Riemann–Stieltjes Integralinin tanımının doğal bir sonucudur.

Riemann–Stieltjes Integralinin temel özellikleri yukarıdaki teoremden sıralanmıştır ve tahmin edileceği gibi Riemann Integralinin özelliklerine çok benzerdirler. Önemle belirtilmelidir ki φ fonksiyonunun sürekli olması gerekmez. Aslında, eğer f $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli ve φ $[\alpha, \beta]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon ise, bu durumda $\int_\alpha^\beta f(t) d\varphi(t)$ mevcuttur.

Örneğin; $\varphi(t) = u_a(t)$ olsun. Birim basamak fonksiyonu (unit step function)

$a \geq 0$ için:

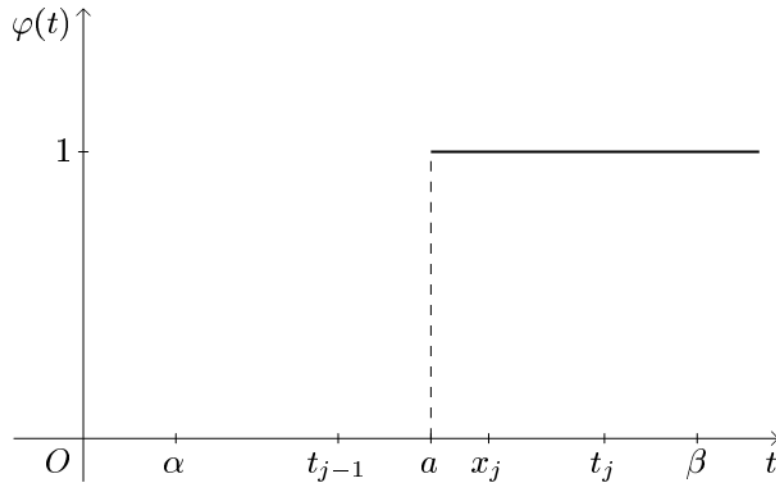
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

Eğer f $[\alpha, \beta]$ üzerinde bir aralıkta sürekli ise ve $\alpha < a < \beta$ olacak şekilde a 'yı içeriyorsa, bu durumda $t_{j-1} < a \leq t_j$ özel aralığında (1) ifadesi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f(x_i)[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] &= f(x_i)[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})] \\
&= f(x_i)(1 - 0) \\
&= f(x_i)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.1.

$\Delta \rightarrow 0$ (buna uygun olarak $x_j \rightarrow a$) Riemann–Stieltjes Integrali

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) du_a(t) = f(a) \quad (2)$$

biçiminde yazılır, çünkü bu şartlarda $f(x_j) \rightarrow f(a)$ olur.

Bu özelliğe “eleme özelliği” (sifting property) denir. Burada δ_a

$$\delta_a = du_a, \quad a \geq 0 \quad (3)$$

şeklinde belirtelim ve $a = 0$ için $\delta = \delta_0$ alalım. Eleme (sifting) özelliğinden sürekli fonksiyonlar üzerinde δ_a ’nın etkisinin bir operatör olduğu görülür ki

$$\delta_a[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_a(t) dt = f(a), \quad (4)$$

biçimindedir ve bu operatörün c_1, c_2 sabitleri için doğrusal olduğu görülür.

$$\delta_a[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \delta_a[f_1] + c_2 \delta_a[f_2]$$

Burada δ_a ya İmpuls fonksiyonu, Dirac operatörü veya Dirac delta fonksiyonu denilebilir.

Riemann integralini sürekli fonksiyonlar için eleme (sifting) özelliğinin her özel φ_a fonksiyonu kapsamayabileceğini göstermek amaçlı kullanalım.

f_n sürekli bir fonksiyon, $|t| \geq 1/n$ için $f_n(t) = 0$, $|t| < 1/n$ için $f_n(t) = 1 - n|t|$ olsun öyle ki $a = 0$ ve $f_n(0) = 1$. Eğer φ_0 Riemann integrallenebilir ise bu durumda $[-1, 1]$ gibi bir aralıkta M gibi bir sabitle sınırlı olmak zorundadır. Eğer φ_0 eleme (sifting) özelliğini sağlarsa, buradan

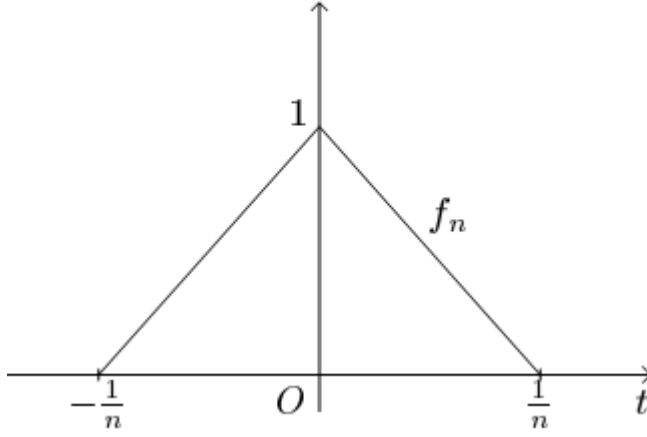
$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \varphi_0(t) dt \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(t) |\varphi_0(t)| dt \\ &\leq M \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt = \frac{2M}{n}, \end{aligned}$$

elde edilir ki bu durum n nin yeterince büyük olması durumuna bir çelişki teşkil eder. (Şekil 3.2.)

Ancak, uygun şartlar altında Riemann–Stieltjes ve Riemann İntegralleri arasında önemli bir ilişki mevcuttur. Bilhassa, eğer $f, \varphi, \varphi' [\alpha, \beta]$ üzerinde sürekli iseler, bu durumda

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) d\varphi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi'(t) dt \quad (5)$$

olur.



Şekil 3.2.

Dirac operatörünün bir sonraki özelliği:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) dt = 1 \quad (6)$$

Bu özellik, a noktasında yoğunlaşmış noktalar topluluğunun toplamı 1 e eşittir şeklinde ifade edilebilir.

(Kaynak: Schiff-1991, 75-78)

4. RIEMANN-STIELTJES İNTEGRALI İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$[0, \infty)$ arasında tanımlı bir φ fonksiyonu için Laplace dönüşümü uygulanırsa:

$$F(s) = \mathcal{L}_{R-S}(d\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\varphi(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b e^{-st} d\varphi(t) \quad (7)$$

elde edilir (eğer bu integral mevcutsa). İntegrali $(-\infty, \infty)$ aralığında aldığımız için $t < 0$ durumunda her zaman $\varphi(t) = 0$ alınır. Özellikle $d\varphi = du_a = \delta_a$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R-S}(\delta_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \delta_a(t) \\ &= e^{-as}, \quad a \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(eleme (sifting) özelliği)

Burada $a = 0$ ise $\mathcal{L}_{R-S}(\delta) = 1$ olur.

(Kaynak: Schiff-1991,78)

5. UYGULAMALI ÖRNEKLER

Örnek 1: $x'(t) = \delta(t)$, $x(0) = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm: İlk olarak bu denklemin her iki yanının da lineer operatör olduğunu dikkate alalım. Her iki tarafa da $\mathcal{L}_{R-s}$ uygulanırsa, bu durumda

$$s \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{R-s}(\delta) = 1$$

elde edilir ve buradan,

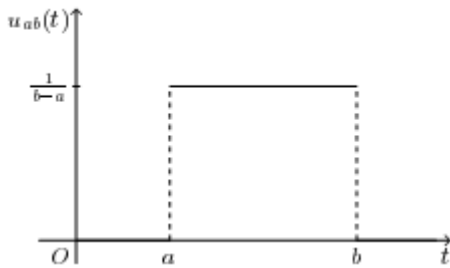
$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s}$$

bulunur öyle ki burada $x(t) \equiv 1, t \geq 0$.

Ancak dikkat edilirse $x(0) = 0$ sağlanmadığı görülür. Fakat eğer $t < 0$ için $x(t) = 0$ tanımlanırsa, o zaman $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = 0$ olur. Daha da ileri giderek;

$$x(t) = u(t),$$

yani birim basamak fonksiyonu (unit step function) olur.



Birim basamak fonksiyonu:

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{b-a} (u_a(t) - u_b(t)), \quad b > a \geq 0$$

şeklinde tanımlanır ve burada $u_{ab}(t)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{ab}(t) dt = 1$$

özelliğine sahiptir.

(Kaynak:Schiff-1991,79)

Örnek 2: $y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t - 2) + e^t$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -3$ başlangıç değer problemini çözelim.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) - 10Y(s) &= 4e^{-2s} \\ (s^2 + 3s - 10)Y(s) - 2s - 3 &= 4e^{-2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4e^{-2s}}{(s+5)(s-2)} + \frac{2s+3}{(s+5)(s-2)} \\ &= Y_1(s)e^{-2s} + Y_2(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada kısmi kesirlere ayırma uygulaması yapılırsa;

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{4}{(s+5)(s-2)} = \frac{4}{7} \frac{1}{s-2} - \frac{4}{7} \frac{1}{s+5} \\ Y_2(s) &= \frac{2s+3}{(s+5)(s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+5}. \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak bunların ters dönüşümleriyle;

$$y_1(t) = \frac{4}{7}e^{2t} - \frac{4}{7}e^{-5t}$$

$$y_2(t) = e^{2t} + e^{-5t}$$

elde edilir ve bu durumda çözüm :

$$y(t) = y_1(t-2)u_2(t) + y_2(t)$$

$$= u_2(t) \left(\frac{4}{7}e^{2(t-2)} - \frac{4}{7}e^{-5(t-2)} \right) + e^{2t} + e^{-5t}$$

$$= u_2(t) \left(\frac{4}{7}e^{2t-4} - \frac{4}{7}e^{-5t+10} \right) + e^{2t} + e^{-5t}.$$

olur.

Örnek 3: $y'' + 4y' + 9y = 2\delta(t-1) + e^t$ $y(0)=0$ $y'(0)=-1$ başlangıç değer problemini çözelim.

Çözüm: İlk olarak denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulayalım ve $Y(s)$ için çözüm bulalım.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = 2e^{-s} + \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2 + 4s + 9)Y(s) + 1 = 2e^{-s} + \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{2e^{-s}}{s^2 + 4s + 9} + \frac{1}{(s-1)(s^2 + 4s + 9)} - \frac{1}{s^2 + 4s + 9}$$

$$= Y_1(s)e^{-s} + Y_2(s) - Y_3(s)$$

Devamında $Y(s)$ ters dönüşüm için hazırlanmalıdır. Burada $Y_1(s)$ ve $Y_3(s)$ nin tamkareye tamamlanıp, $Y_2(s)$ nin de kısmi kesirlere ayrılması gerekir. Buradan

$$\begin{aligned}
Y_1(s) &= \frac{2}{s^2 + 4s + 9} = \frac{2}{(s+2)^2 + 5} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+2)^2 + 5} \\
Y_2(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2 + 4s + 9)} = \frac{1}{14} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+5}{(s+2)^2 + 5} \right) \\
&= \frac{1}{14} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{(s+2-2)+5}{(s+2)^2 + 5} \right) \\
&= \frac{1}{14} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 5} - \frac{3}{(s+2)^2 + 5} \right) \\
&= \frac{1}{14} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 5} - \frac{3}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+2)^2 + 5} \right) \\
Y_3(s) &= \frac{1}{(s^2 + 4s + 9)} = \frac{1}{(s+2)^2 + 5} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+2)^2 + 5}.
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu üçünün ters dönüşümleri ise;

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin(\sqrt{5}t) \\
y_2(t) &= \frac{1}{14} \left(e^t - e^{-2t} \cos(\sqrt{5}t) - \frac{3}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin(\sqrt{5}t) \right) \\
y_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin(\sqrt{5}t).
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Sonuçta orjinal dönüştürülmüş fonksiyonumuz ;

$$Y(s) = Y_1(s)e^{-s} + Y_2(s) - Y_3(s)$$

olduğu için,

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_1(t)y_1(t-1) + y_2(t) - y_3(t) \\
&= u_1(t) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-2t+2} \sin(\sqrt{5}t - \sqrt{5}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{14} \left(e^t - e^{-2t} \cos(\sqrt{5}t) - \frac{3}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin(\sqrt{5}t) \right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin(\sqrt{5}t).
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 4: $y'' + 16y = 2u_3(t) + 5\delta(t-1)$ $y(0)=1$ $y'(0)=2$ başlangıç değer problemini çözelim.

Çözüm: Bütün denklemin Laplace dönüşümünü alıp başlangıç şartlarını uygularsak, bu durumda $Y(s)$ in çözümü için,

$$\begin{aligned}
s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) &= \frac{2e^{-3s}}{s} + 5e^{-s} \\
(s^2 + 16)Y(s) - s - 2 &= \frac{2e^{-3s}}{s} + 5e^{-s} \\
Y(s) &= \frac{2e^{-3s}}{s(s^2 + 16)} + \frac{5e^{-s}}{s^2 + 16} + \frac{s+2}{s^2 + 16} \\
&= Y_1(s)e^{-3s} + Y_2(s)e^{-s} + Y_3(s)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu üç fonksiyondan sadece birincisinin kısmi kesirlere ayrılmaya ihtiyacı var. Diğerlerinin doğrudan sonucu yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeleri yaparak,

$$\begin{aligned}
Y_1(s) &= \frac{2}{s(s^2 + 16)} = \frac{1}{8} \frac{1}{s} - \frac{1}{8} \frac{s}{s^2 + 16} \\
Y_2(s) &= \frac{5}{s^2 + 16} = \frac{5}{4} \frac{4}{s^2 + 16} \\
Y_3(s) &= \frac{s+2}{s^2 + 16} = \frac{s}{s^2 + 16} + \frac{1}{2} \frac{4}{s^2 + 16}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Bununla birlikte ilgili ters dönüşümleri yaptığımızda

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4t) \\
y_2(t) &= \frac{5}{4} \sin(4t) \\
y_3(t) &= \cos(4t) + \frac{1}{2} \sin(4t)
\end{aligned}$$

bulunur. Bizim çözümümüz $Y(s) = Y_1(s)e^{-3s} + Y_2(s)e^{-s} + Y_3(s)$ ifadesinin ters dönüşümü olduğu için, buradan

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_3(t)y_1(t-3) + u_1(t)y_2(t-1) + y_3(t) \\
&= u_3(t) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4(t-3)) \right) + \frac{5}{4} u_1(t) \sin(4(t-1)) + \cos(4t) + \frac{1}{2} \sin(4t) \\
&= u_3(t) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4t-12) \right) + \frac{5}{4} u_1(t) \sin(4t-4) + \cos(4t) + \frac{1}{2} \sin(4t).
\end{aligned}$$

çözümü ortaya çıkar.

Örnek 5: Kütlesi 2, sönüm katsayısı 4 ve yay sabiti 10 olan bir yay-kütle sistemi $t = 0$ anında bir çekiç darbesine maruz bırakılıyor. Darbe, başlangıçta nötr olan sisteme 1 değerinde bir impuls kazandırır. Buna göre sistemin yanıtını bulalım.

Çözüm: Bu durum $x(0) = 0$ ve $x'(0) = 0$ başlangıç şartlarıyla birlikte $2x''(t) + 4x'(t) + 10x(t) = \delta(t)$ şeklinde modellenebilir. İfadenin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alıp başlangıç şartları uygulandığında;

$$2s^2 X(s) + 4sX(s) + 10x(s) = 1$$

elde edilir. Buradan $X(s)$ yalnız bırakılırsa ;

$$X(s) = \frac{1}{2s^2 + 4s + 10}$$

sonucunu elde ederiz. Elde ettiğimiz son ifadeyi

$$X(s) = \frac{1}{2(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

şeklinde yazıp Laplace Dönüşüm Tablosundan yardım alarak $X(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümünü aldığımızda;

$$x(t) = \frac{1}{4} e^{-t} \sin(2t)$$

elde edilir ki bu da sistemin yanıtını verir.

Örnek 6: Kütlesi m olan bir tüfek saçması $t = 0$ anında bir tüfekten v_0 namlu çıkış hızı ile ateş ediliyor. Eğer saçma bir viskoz gazın (yoğunlaştırılmış gaz) içine ateş edilirse, hareketinin denklemi;

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} = mv_0 \delta(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $x(t)$, $t \geq 0$ anındaki yer değişimi ve $k > 0$ da bir sabittir. $x'(0) = 0$ ifadesi ise, saçmanın başlangıçta $t < 0$ için hareketsiz durumda olduğunu belirtir.

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınır,

$$ms^2 L(x) + ksL(x) = mv_0 L(\delta) = mv_0,$$

$$L(x) = \frac{mv_0}{ms^2 + ks} = \frac{v_0}{s(s + k/m)}$$

ifadesini elde edilir. $\frac{v_0}{s(s + k/m)}$ ifadesini $\frac{v_0}{s(s + k/m)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + k/m}$ şeklinde yazarak kısmi kesirlere ayırırsak:

$$A = \frac{mv_0}{k}, \quad B = -\frac{mv_0}{k}$$

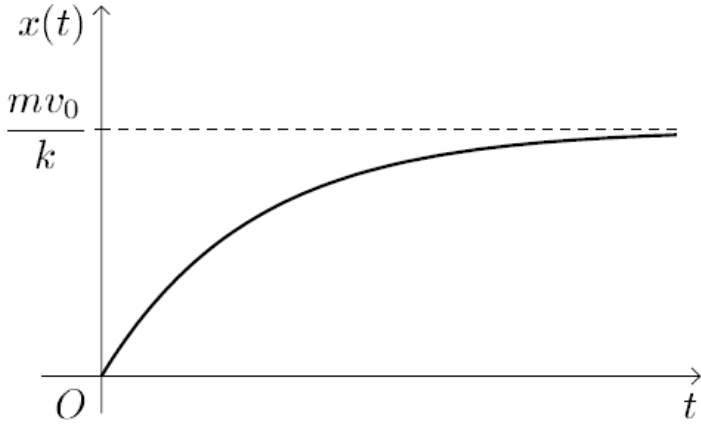
ifadelerini buluruz ve

$$L(x) = \frac{mv_0/k}{s} - \frac{mv_0/k}{s + k/m}$$

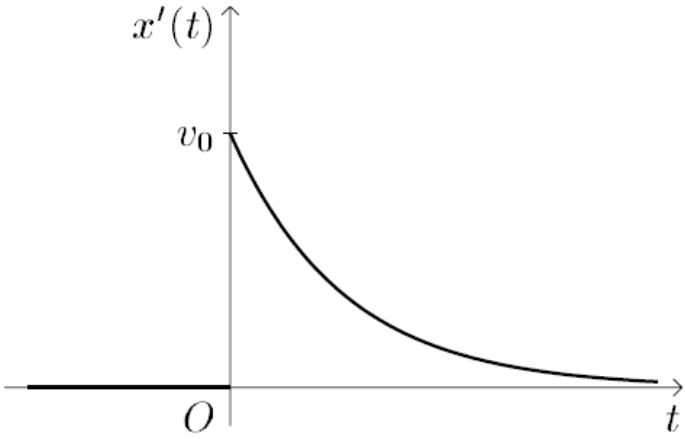
elde ederiz. Ters Laplace dönüşümünü alırsak:

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

çözümünü elde ederiz.



Şekil a.



Şekil b.

t anında saçmanın hızını $x(t)$ nin türevini alarak hesaplarsak:

$$x'(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

denklemini elde ederiz. Burada bir taraftan $\lim_{t \rightarrow 0^+} x'(t) = v_0$ iken diğer taraftan $\lim_{t \rightarrow 0^-} x'(t) = 0$ dır. Bu ifadeler $t = 0$ anındaki hızdaki ani sıçramayı, yani hareketsiz durumdan v_0 hızına ulaşma durumunu özetler. Bu da Şekil b.'de resmedilmiştir.

Bu problem ayrıca,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} =, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0,$$

şeklinde de formüle edilebilir. Bu denklemin çözümü de bizi yukarıdaki çözüme götürür.

(Kaynak:Schiff-1991,82)

6. LAPLACE DÖNÜŞÜM TABLOSU

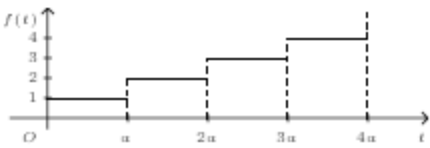
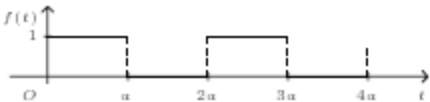
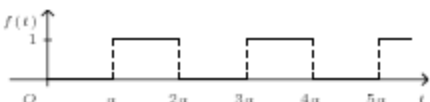
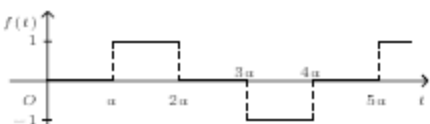
$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s^\nu} \quad (\nu > 0)$	$\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$
$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$	$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$ Laguerre polynomials
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{a e^{at} - b e^{bt}}{a-b}$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \sin at$
$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \cos at$

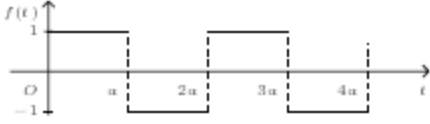
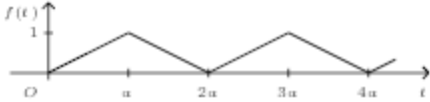
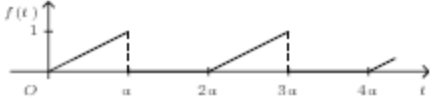
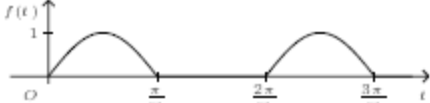
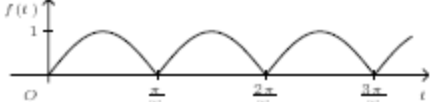
$F(s)$	$f(t)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{a}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
$\frac{s - b}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$
$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(t \sin at)$
$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at \cos at)$
$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2} at \sin at$
$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(at \cosh at - \sinh at)$
$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(t \sinh at)$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sinh at + at \cosh at)$
$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2} at \sinh at$
$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
$\frac{ab}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$
$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$
$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$
$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
$\frac{ab}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{b \sinh at - a \sinh bt}{a^2 - b^2}$
$\frac{s}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cosh at - \cosh bt}{a^2 - b^2}$
$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a \sinh at - b \sinh bt}{a^2 - b^2}$
$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a^2 \cosh at - b^2 \cosh bt}{a^2 - b^2}$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$
$\frac{a^2}{s^2(s^2 - a^2)}$	$\frac{1}{a} \sinh at - t$
$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$
$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{(s-a)\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{at} \operatorname{erf} \sqrt{at}$
$\frac{1}{\sqrt{s-a} + b}$	$e^{at} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b e^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t}) \right)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$	$I_0(at)$
$\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^v}{\sqrt{s^2 + a^2}} \quad (v > -1)$	$a^v J_v(at)$
$\frac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^v}{\sqrt{s^2 - a^2}} \quad (v > -1)$	$a^v I_v(at)$
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^v} \quad (v > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v)} \left(\frac{t}{2a} \right)^{v-\frac{1}{2}} J_{v-\frac{1}{2}}(at)$
$\frac{1}{(s^2 - a^2)^v} \quad (v > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v)} \left(\frac{t}{2a} \right)^{v-\frac{1}{2}} I_{v-\frac{1}{2}}(at)$

$F(s)$	$f(t)$
$(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^v \quad (v > 0)$	$\frac{va^v}{t} J_v(at)$
$(s - \sqrt{s^2 - a^2})^v \quad (v > 0)$	$\frac{va^v}{t} I_v(at)$
$\sqrt{s - a} - \sqrt{s - b}$	$\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} (e^{bt} - e^{at})$
$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{e^{-a/s}}{s\sqrt{s}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
$\frac{e^{-a/s}}{s^{v+1}} \quad (v > -1)$	$\left(\frac{t}{a}\right)^{v/2} J_v(2\sqrt{at})$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad (a > 0)$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
$e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \quad (a > 0)$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 < t < k \\ J_0(a\sqrt{t^2-k^2}) & t > k \end{array} \right.$
$\frac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}}$	
	$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 < t < k \\ I_0(a\sqrt{t^2-k^2}) & t > k \end{array} \right.$

$F(s)$	$f(t)$
$e^{-as} \quad (a > 0)$	$\delta_a(t)$
$\frac{e^{-as}}{s} \quad (a > 0)$	$u_a(t)$
$e^{s^2/4} \operatorname{erfc} \frac{s}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$
$\frac{1}{s(e^{as} - 1)} = \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	$\left[\frac{t}{a} \right] \quad ([t] : \text{greatest integer } \leq t)$
$\frac{1}{s(e^s - a)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})} \quad (a \neq 1)$	$\frac{a^{[t]} - 1}{a - 1}$
$\frac{e^s - 1}{s(e^s - a)} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}$	$a^{[t]}$
$\frac{1}{s(1 - e^{-as})}$	
$\frac{1}{s(1 + e^{-as})}$	
$\frac{1}{s(1 + e^{as})}$	
$\frac{1 - e^{-as}}{s(e^{as} + e^{-as})}$	

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{(1 - e^{-as})}{s(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2}$	
$\frac{1 - e^{-as}}{as^2(1 + e^{-as})} = \frac{1}{as^2} \tanh \frac{as}{2}$	
$\frac{1 - (1 + as)e^{-as}}{as^2(1 - e^{-2as})}$	
$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\pi s/\omega})}$	
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{1 + e^{-\pi s/\omega}}{1 - e^{-\pi s/\omega}} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}$	
$\log \left(\frac{s+a}{s+b} \right)$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
$\frac{-(\log s + \gamma)}{s} \quad (\gamma: \text{Euler constant})$	$\log t$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{\log s}{s}$	$-(\log t + \gamma)$
$\log \left(\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2} \right)$	$\frac{2}{t}(\cos bt - \cos at)$
$\tan^{-1} \left(\frac{a}{s} \right)$	$\frac{1}{t} \sin at$
$\frac{\sinh \chi s}{s \sinh as}$	$\frac{\chi}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi\chi}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\sinh \chi s}{s \cosh as}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \sin \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi\chi \sin \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi t$
$\frac{\cosh \chi s}{s \sinh as}$	$\frac{t}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi\chi}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\cosh \chi s}{s \cosh as}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi\chi \cos \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi t$
$\frac{\sinh \chi s}{s^2 \sinh as}$	$\frac{\chi t}{a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi\chi}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\sinh \chi s}{s^2 \cosh as}$	$\chi + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi\chi \cos \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi t$
$\frac{\cosh \chi s}{s^2 \sinh as}$	$\frac{1}{2a} \left(\chi^2 + t^2 - \frac{a^2}{3} \right) - \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi\chi}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\cosh \chi s}{s^2 \cosh as}$	$t + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi\chi \sin \left(\frac{2n-1}{2a} \right) \pi t$
$\frac{\sinh \chi \sqrt{s}}{\sinh a \sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \sin \frac{n\pi\chi}{a}$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{\cosh \kappa \sqrt{s}}{\cosh a \sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos\left(\frac{2n-1}{2a}\right) \pi \kappa$
$\frac{\sinh \kappa \sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a \sqrt{s}}$	$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2a}\right) \pi \kappa$
$\frac{\cosh \kappa \sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a \sqrt{s}}$	$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \cos \frac{n \pi \kappa}{a}$
$\frac{\sinh \kappa \sqrt{s}}{s \sinh a \sqrt{s}}$	$\frac{\kappa}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \sin \frac{n \pi \kappa}{a}$
$\frac{\cosh \kappa \sqrt{s}}{s \cosh a \sqrt{s}}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos\left(\frac{2n-1}{2a}\right) \pi \kappa$
$\frac{\sinh \kappa \sqrt{s}}{s^2 \sinh a \sqrt{s}}$	$\frac{\kappa t}{a} + \frac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2 \pi^2 t / a^2}) \sin \frac{n \pi \kappa}{a}$
$\frac{\cosh \kappa \sqrt{s}}{s^2 \cosh a \sqrt{s}}$	$\frac{\kappa^2 - a^2}{2} + t - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos\left(\frac{2n-1}{2a}\right) \pi \kappa$

(Kaynak: Schiff-1991, 210)

KAYNAKLAR

1. A. D. Polyanin, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca .
2. İ.G.Armanoviç, Operasyon Hesabı «Fiz.-Mat.Bilim», 1968.
3. G.Deç, Laplace'ın Pratikte ve Öğretimde Kullanımı, «Bilim», 1965.
4. A.İ.Markuşeviç, Analitik fonksiyonlar teorisi için kısa bir kurs, «Bilim», 1966.
5. G.Korn ve T.Korn, Matematik için sözlük, «Bilim», 1970.
6. Joel L. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications, Springer,1991.