KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STİELTJES İNTEGRALİNDE SAYISAL YAKLAŞIM METODLARI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Murat SEZER

BİŞKEK 2010

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STİELTJES İNTEGRALİNDE SAYISAL YAKLAŞIM METODLARI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Murat SEZER

Danışman

Prof.Dr.Avıt ASANOV

BİŞKEK 2010

İntihal Yapılmadığını Belirten İfade

Ben bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallara göre aldığımı ve sunduğumu belirtiyorum.Bu çalışmaya özgün olmadan kullandığım bütün materyal ve bilgilere akademik ve etik kurallar gereğince atıfta bulunduğumu ve hiçbir şekilde intihal yapmadığımı açıkça bildiriyorum.

İSİM,SOYAD:

İMZA:

TARİH:

Плагиат жасалбагандыгы тууралуу билдируу

Мен бул эмгекте алынган бардык маалыматтарды академияалык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум.Тагыраак айтганда бул эмгекте колдонулган бирок мага тишелүү болбогон малыматтардын бардыгын тиркеьеде так көрсөттүм жана эч кайы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

АТЫ,ЖӨНҮ:

КОЛУ:

ДАТАСЫ:

KIRGIZİSTAN TÜRKİYE

MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Anabilim dalı, Matematik Bilim dalı'nda 0851Y03003 numaralı Murat Sezer in hazırladığı "Stieltjes integralinin değerini Simpson kuralını kullanarak yaklaşık olarak bulma" konulu Yüksek Lisans ile ilgili tez savunma sınavı, .../.../ 2010 günü ...-... saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin ... olduğuna ... ile karar verilmiştir.

ЧЕЧИМ

Кыргыз-Түрк Манас университетинин Коомдук Илимдер Институтунун экзамендик инструкциясынын ...- жобосуна ылайык, ... № жыйында уюшулган комиссия, педагогика бөлүмүнүн магистранты ... темасында жазган дипломдук проектин анализдеп, .../.../ 2010 ж. Саат ... дө жактоого кабыл алды.

Магистрант ... минута убакыт ичинде дипломдук проектин жактап, комиссия деген чечим чыгарды.

КЫСКАЧА МАЗМУНУ

Даярдаган	: Мурат СЕЗЕР
Университет	: Кыргызстан-Туркия Манас Университети
Институт	: Табигий Илимдер Институту
Багыты	: Математика
Иштин сыпаты	: Магистрстура
Беттердин саны	: XI+17
Бүтүрүү датасы	: Май 2010
Диссертация жетекчиси	: Проф.Др.Авыт Асанов

Стильтестин интегралын Симпсон методу менен жакындаштырып эсептөө

Математикалык эсептерде же математика колдонулган көп жерлерде берилген функциялардын туундуларын алуу же интегралдык эсептөөлөр бар. Бирок бул функциялардын туундуларын алуу же болбосо интегралдарын эсептөө абдан татаал болгон учурлар болот, кээдэ болсо мүмкүн болбогон учурлар болот. Мындай учурларда башка бир функцияга карата туунду алынганда туундулары бар экендиги көрүлдү. Мындай туунду алуу Стильтьес интегралынын тескери операциясы экендиги көрсөтүлгөн, Стильтьес интегралынын айрым учуру Риман интегралы болушу, бул интегралдын керектүүлүгүн көрсөтөт. Бирок бул Стильтьес интегралын чыгарылышы ар дайым бар экендиги билинсе дагы, буну эсептөө ар дайым мүмкүн болбойт. Ошондуктан интегралды жакындаштырып эсептөө методдору колдонулат. Риман интегралын жакындаштырып эсептөөдө колдонулган Симпсон методу Стильтьес интегралына да колдонулушу мүмкүн экендиги көрсөтүлдү. Албетте жакындаштырып эсептөөнүн так чыгарылыштан айырмасы болот, ушул катасын кантип табуу жана кандай шарттар коюш керектиги көрсөтүлдү.Алгач, биринчи бөлүмдө башка бир өсүүчү үзгүлтүксүз функцияга карата туунду алуунун аныктамасы жана бул туунду алуунун кээ бир теоремалары каралды. Кийинки бөлүмдө, бул туунду алуунун тескери функциясы болгон Стильтестин интегралын аныктамасы берилди. Акыркы үчүнчү бөлүмдө болсо, жакындаштырып эсептөө методдорунан Симпсон методунун аныктамасы менен бирге бул методдун бир гана Риман интегралына эмес, Стильтестин интегралына да колдонууга болоору көрсөтүлдү.

Ачкыч сөздөр: Стильтьес интегралы, Риман интегралы, жакындаштырып эсептөө, туунду, интеграл, Симпсон методу

АБСТРАКТ

Автор : Мурат СЕЗЕР

Университет : Кыргызстан-Турция Манас Университети

Институт : Естественных Наук

Кафедра : Математика

Качество диссертации : Магистратура

Количество страниц : XI + 17

Дата выпуска : Май 2010

Руководитель диссертации : Проф.Др.Авыт Асанов

Приблеженное вычисление интеграла Стильтеса методом Симпсона

Во многих Математических и Научных вычислений или же в Прикладной Матиматике нужно взять производную или интеграл какой либо функции. Но как известно не все функции могут быть дифференцированны или же интегрированны методом Рейманна. Если у какой нибуть фунции существует производная относительно другой функции, то производная может существовать. В дополнение, если первообразная относительно функции которая равна интегралу Стилтьеса, то можно вычислить интеграл некоторых не диференцируемых функций. Но к сожелению, даже при гарантии существования, крайне тяжело вычислить интеграл методом Стилтьеса. Это всё ведёт к методом приближение. В интегралле Реймана сущестует множество методов приближения. И одно из них это метод Симпсона. В этой статье, пытается опредилить возможно ли использование метода Симпсона в вычисление интегала методом Стильеса. Так как здесь используется метот приближения то тут нужно ожидать погрешности вычисления. Так же в этой статье высчитываются все формулы и нужные условия для снижения погрешности.

Первая глава посвещенна производной относительна безприрывной и возрастающей функции. Здесь данны несколько законов производных и теорема расширения Тейлора. Далее во второй главе, интеграл Стильтеса определяется как первообразная относительна функции. После фундоментальных определений в третьей главе определяется и закон приближения метод Симпсона, и вычитывается погрешность для этого метода. Далее даётся приложения метода вычисления с использованием интеграла Стильтеса.

Ключевые слова: интеграл Стилтьеса, интеграл Римана, Приблеженное вычисление, метод Симпсона, производная, интеграл

ABSTRACT

Prepared by : Murat SEZER

University : Kyrgyzstan-Turkey Manas University

Institute : Natural Sciences

Department : Mathematics

Thesis Level : Master Thesis

Number of Pages : XI + 17

Graduate Date : May 2010

Thesis Advisor : Prof.Dr. Avit Asanov

Approximate Integration of Stieltjes Integral by using the Simpson`s Rule

In many parts of Mathematical computations, Scientific computations or in Applied Mathematics it is needed to differentiate a function or integrate a function. However, it is known that many functions are not differentiable and cannot be integrable by using Riemann integrations methods. If some of this kind of functions are differentiated with respect to another function, derivative may exists. In addition, as an antiderivative with respect to function that is Stieltjes integral, some of unintegrable functions can be integrated with respect to function above. Unfortunately, it is again difficult to integrate many functions by using this Stieltjes integral, even though the existence is guaranteed. This leads to use approximation methods. In Riemann integral, there are many approximation methods. One of these methods is the Simpson`s Rule. In this paper, it is tried to find whether it is possible to use this Simpson`s method in Stieltjes integral or not. Since this is an approximation method, it can be thought immediately about the error bound in this calculation. In this paper, the Formula and needed conditions fort he error bound are also obtained.

As a preliminary section, the first section is devoted to derivative with respect to a continuous and increasing function. Here some of the differentiation rules are given. Then, Stieltjes integral is defined as an antiderivative of this differentiation. After these fundamental studies, one of the approximation methods The Simpson`s Rule is defined and error bound is obtained. And then, this method is applied to Stieltjes integral.

Keywords: Differentiation, Integral, Stieltjes integral, Riemann integral, approximation methods, error bounds, The Simpson`s Rule.

ÖNSÖZ

Bu eserde Riemann integralinin hesaplanmasında kullanılabilecek sayısal metodlardan birisi olan Simpson`s Yaklaşım Kuralı ve hata payı üzerinde duruldu.Sonra bu sayısal yaklaşım kuralı ve hata payı $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ olarak tanımlanan Stieltjes integraline uygulandı. f(x) , (a,b) aralığında sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(x)$ artan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $I_s = \int_a^b f(x)d\varphi(x)$ Stieltjes integralini düşünelim.Biliyoruz ki I_s nin varlığı garanti olsada,hesaplanması çok zor hatta bazen imkansız olabilir.Bu durumlarda, I_s yi simpson`syaklaşım kuralını kullanarak hesaplayabiliriz.

Bu tez çalışmamda,sabırla bana yardımcı olan,yol gösteren,değerli hocam Prof.Dr.Avıt ASANOV Bey'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bişkek 2010 Murat SEZER

İÇİNDEKİLER:

İKİNCİ BÖLÜM

(STİELTJES İNTEGRALİ)

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

(SIMPSON YAKLAŞIM KURALI VE RİEMANN İNTEGRALİ)

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

(SIMPSON YAKLAŞIM KURALI VE STİELTJES İNTEGRALİ)

SEMBOLLER LİSTESİ

$[a,b]$	a , b kapalı aralığı
(a,b)	a , b açık aralığı
$\in$	elemanıdır
f'_{φ}	$\varphi(x)$ fonksiyonuna göre türev
$\rightarrow$	yaklaşır
Δx	x in çevresindeki en küçük aralık
$\int f(x)\, d\varphi(x)$	$\varphi(x)$ fonksiyonuna göre integral
$\max\limits_{x\in[a,b]}$	$[a,b]$ aralığındaki x in maksimum değeri
$\sup\limits_{\lvert x-y\rvert\leq\delta}$	verilen şarta göre en küçük üst sınır

GİRİŞ

Matematiğin önemli konularından birisi olan İntegral,uygulamalı matematik,fizik,mühendislik,vs gibi alanların bir çok bölümünde kullanılmaktadır.

Riemann integralinin genel hali olan Stieltjes integralide olasılık ve eşitsizliklerin ispatı gibi uygulamalı matematiğin bir çok bölümünde kullanılmaktadır.

İntegrale başlamadan önce bu integralin tersi olan diferansiyele göz atmak faydalı olacaktır.Bu diferansiyelde türev x e göre değil,bir fonksiyona göre alınacaktır.Bu teknik x e göre türevi olmayan fonksiyonların türevlenebilmesinde bize yardımcı olacaktır.Burada kendisine göre türev alacağımız fonksiyonun [a,b] aralığında artan sürekli bir fonksiyon olma gibi sınırlılığı vardır.Bu fonksiyonun tersi Stieltjes integrali veya bir fonksiyona göre integral alma olarak adlandırılır.

X e göre türev almak güç olduğunda,bu integral alma tekniği çok kullanışlı olacaktır.Bu integrali var olsa bile Stieltjes integralini hesaplamanın her zaman mümkün olduğu anlamına gelmez.Bu durumlarda,yaklaşım metodlarıyla integral istenilen kesinlikte hesaplanabilir.

Riemann integralinde Yamuk sayısal yaklaşım kuralı,Orta nokta kuralı,Simpson kuralı,vs gibi bir çok yaklaşım metodu bulunmaktadır.Her bir yaklaşım metodunun kendine özgü şartları ve sınırlılıkları mevcuttur.Mesela hata payının hesaplanabilmesi için Simpson kuralında fonksiyonun dördüncü türevi,Orta nokta kuralında ikinci türevi var olması gerekir.Bu çalışmada Simpson Yaklaşım Kuralının Stieltjes integralinde kullanılması gösterilmeye çalışılacak.Eğer bu kuralın,Stieltjes integralinde kullanımının mümkün olduğunu ispat edebilirsek,o zaman bir çok integrali,istediğimiz kesinlikte,bu yaklaşım kuralı ile hesaplayabiliriz.

BİRİNCİ BÖLÜM

(ARTAN VE SÜREKLİ BİR FONKSİYONA GÖRE TÜREV)

1.ARTAN VE SÜREKLİ BİR FONKSİYONA GÖRE BİR FONKSİYONUN TÜREVİ

1.1. Artan Ve Sürekli Bir Fonksiyona Göre Türevin Tanımı:

Tanım 1: $f(x)$, (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $\varphi(x)$, (a,b) aralığında düzenli artan sürekli bir fonksiyon olsun. $\Delta x \neq 0$ olmak üzere (a,b) aralığından x noktası alınsın.Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun $\varphi(x)$ e göre türevi

$f_{\varphi}'(x) = \dfrac{df}{d\varphi}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}$ olarak tanımlanır.

Teorem 1:

$x_0 \in (a,b)$ için $f(x)$ fonksiyonu $\varphi(x)$ e göre türevlenebilir ise $f(x)$, x_0 da süreklidir.

İspat:

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 da $\varphi(x)$ e göre türevlenebilir bir fonksiyon ise,1.tanımdan

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta \varphi(x_0)} = \dfrac{df}{d\varphi}(x_0) = f_{\varphi}'(x_0)$ yazılır.Bu durumda, $\Delta x \to 0$ iken $\alpha(\Delta x)$

olabildiğince küçük olmak üzere $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta \varphi(x_0)} = f_{\varphi}'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ dir veya

$\Delta f(x_0) = f_{\varphi}'(x_0)\Delta\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta\varphi(x_0)$ dır. $\Delta x \to 0$ iken

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$ olur ki bu da $f(x)$ in x_0 da sürekli olduğunu gösterir.

Örnek: $f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevlenemez olduğu gösterilebilir.Ama aynı $f(x)=|x|$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında düzenli artan sürekli bir $\varphi(x)=\begin{cases}-|x|^{\frac{1}{3}} , & x<0 \\ |x|^{\frac{1}{3}} , & x\geq 0\end{cases}$ fonksiyonuna göre türevlenebilir.

Çözüm:

$x<0$ olmak üzere

$$f'_{\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3}{-\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\cdot|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)}{-\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\cdot|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)=-3\cdot|x|^{\frac{2}{3}}$$

ve $x>0$ olmak üzere

$$f'_{\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\cdot|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\cdot|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)=3\cdot|x|^{\frac{2}{3}}$$

Ve $x=0$, $\Delta x>0$ olmak üzere

$$f'_{\varphi}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0$$

Şimdi $\Delta x < 0$ alalım.

$$f_\varphi'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\varphi(\Delta x) - \varphi(0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{-|\Delta x|^{\frac{1}{3}}} = 0$$

buradan $f_\varphi'(0) = 0$ olur.

Bu durumda $f(x) = |x|$ fonksiyonu $\varphi(x)$ e göre $(-\infty, \infty)$ aralığında türevlenebilir.

$$f_\varphi'(x) = \begin{cases} -3 \cdot |x|^{\frac{2}{3}} \ , \ x < 0 \\ \ \ 3 \cdot |x|^{\frac{2}{3}} \ , \ x > 0 \end{cases}$$

1.2. Artan Ve Sürekli Bir Fonksiyona Göre Türev Alma Kuralları:

1) C herhangi bir sabit olmak üzere $(C)_\varphi' = 0$

2) $(u+v)_\varphi' = u_\varphi' + v_\varphi'$

3) $(u \cdot v)_\varphi' = u_\varphi' \cdot v + u \cdot v_\varphi'$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)_\varphi' = \dfrac{u_\varphi' \cdot v - u \cdot v_\varphi'}{v^2}$

5) Chain Rule*:* $u(x)$, $x = x_0$ noktasında $\varphi(x)$ e göre türevlenebilir fonksiyonu için $u(x_0) = u_0$, $u_\varphi'(x_0) = \alpha$ ve $f(u)$ fonksiyonu $u(x)$ e göre $u = u_0$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f'(u_0) = \beta$ olsun.

   Bu durumda $v(x) = f(u(x))$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında $\varphi(x)$ e göre türevlenebilir öyle ki

   $v_\varphi'(x) = f'(u_0) \cdot u_\varphi'(x_0) = \beta \cdot \alpha$

1.3. Artan Ve Sürekli Bir Fonksiyona Göre Taylor Açılımı:

$f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında $\varphi(x)$e göre n-1 defa türevlenebilen ve $f_\varphi^{(n)}(x_0)$ e sahip bir fonksiyon olsun. $\Delta\varphi = \varphi(x) - \varphi(x_0)$olmak üzere

$$q(x) = f_n(x_0, x) = f(x_0) + \frac{f_\varphi'(x_0)}{1!}\Delta\varphi + \frac{f_\varphi''(x_0)}{2!}(\Delta\varphi)^2 + \ldots + \frac{f_\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta\varphi)^n$$ dir.

İKİNCİ BÖLÜM

(STİELTJES İNTEGRALİ)

2. ARTAN VE SÜREKLİ BİR FONKSİYONA GÖRE TERS TÜREV VE STİELTJES İNTEGRALİ

Teorem 2: $f\left(x\right)$ fonksiyonu $\left[a,b\right]$aralığında sürekli ve $F\left(x\right)=\int\limits_a^x f\left(t\right)\cdot d\varphi\left(t\right)$,

$x\in\left[a,b\right]$ olsun.Bu durumda $F_\varphi'\left(a\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{F\left(a+\Delta x\right)-F\left(a\right)}{\varphi\left(a+\Delta x\right)-\varphi\left(a\right)}$ ve

$F_\varphi'\left(b\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{F\left(b+\Delta x\right)-F\left(b\right)}{\varphi\left(b+\Delta x\right)-\varphi\left(b\right)}$olmak üzere $F_\varphi'\left(x\right)=\left(\int\limits_a^x f\left(t\right)\cdot d\varphi\left(t\right)\right)_\varphi'=f\left(x\right)$

$x\in\left[a,b\right]$olur.

İspat: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\psi(x,\Delta x)=\dfrac{\left(\int\limits_x^{x+\Delta x}\left(f(x)-f(t)\right)d\varphi\right)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}$olmak üzere diferansiyel tanımından

$$F_\varphi'(x)=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\int\limits_x^{x+\Delta x}d\varphi-\int\limits_x^{x+\Delta x}\left(f(x)-f(t)\right)d\varphi\right)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=f(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\psi(x,\Delta x)$$ yazılır.

$\omega_f(\delta)=\sup\limits_{|t-x|\le\delta}\left|f(x)-f(t)\right|$olmak üzere

$\varphi(x)$ fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında artan olduğundan

$$\left|\psi(x,\Delta x)\right|\le\frac{\omega_f(\Delta x)\left(\int\limits_x^{x+\Delta x}d\varphi\right)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=\omega_f(\Delta x)$$ dır.

Buradan açıkça görülür ki $F'_{\varphi}(x) = f(x)$ olmak üzere $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$, den

$\lim_{\Delta x \to 0} |\psi(x, \Delta x)| \leq \lim_{\Delta x \to 0} \omega_f(|\Delta x|) = 0$ dır.

Teorem 3: (Newton-Leibnitz) $f_{\varphi}'(x) = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere $\int_a^b f_{\varphi}'(x) \cdot d\varphi(x) = f(b) - f(a)$ dir.

İspat: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için ξ_i sayısı $[x_{i-1}, x_i]$ dan herhangi bir sayı olmak üzere Stieltjes integralinin tanımından integral

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f'_{\varphi}(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$ toplamı şeklindedir.

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere , Lagranj teoreminden,

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'_{\varphi}(c_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$ olur.Eğer S_n toplamında c_i yi ξ_i ile değiştirirsek $S_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$ olur.

Sonuç: $f_{\varphi}'(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için $\int_a^x f_{\varphi}'(s) \cdot d\varphi(s) = f(x) - f(a)$ dir.

Teorem 4: (Parçalı türev)

$f_{\varphi}'(x)$ ve $g_{\varphi}'(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b f(x) \cdot g_{\varphi}'(x) \cdot d\varphi(x) = [f(x) \cdot g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f_{\varphi}'(x) \cdot d\varphi(x) \text{ dir.}$$

İspat: Stieltjes ile integral alınır

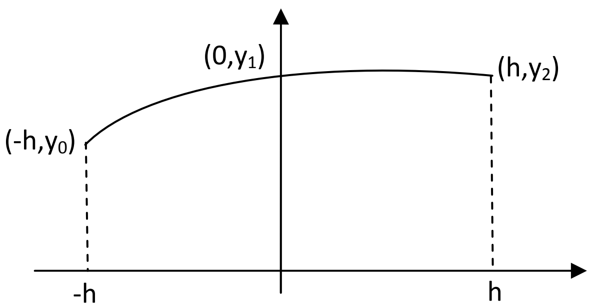
$$[f(x) \cdot g(x)]_{\varphi}' = f_{\varphi}'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{\varphi}'(x)$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

(SIMPSON YAKLAŞIM KURALI VE RİEMANN İNTEGRALİ)

3. SIMPSON YAKLAŞIM KURALININ RİEMANN İNTEGRALİNE UYGULANMASI

3.1 Simpson Yaklaşım Kuralı İle İntegral Hesaplama:



$$A = \int_{-h}^{h} \left(ax^2 + bx + c\right)dx$$

$$= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{2ah^3}{3} + 2ch$$

$$= \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = ah^2 - bh + c \\ \\ y_1 = c \\ \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c \\ \\ \Rightarrow A = \dfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) \end{array}$$

Şimdi kapalı $\left[a,b\right]$ aralığını eşit $N = 2n$ parçaya bölelim

Burada $\begin{cases} x_i = a + \dfrac{b-a}{N} i, \\ f_i = f(x_i) \ , \qquad i = 0,1,2,...,N \end{cases}$ ve $h = \dfrac{b-a}{N} = \dfrac{b-a}{2n}$

Demek $x_j \le x \le x_j + 2h$

$$\int_{x_j}^{x_{j+2h}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_j + 4 f_{j+1} + f_{j+2} \right)$$

Genel olarak

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + \ldots + 4 f_{N-1} + f_N \right)$$

Burada $f_j = f\left(x_j\right) = f\left(a + jh\right) \quad j = 0,1,2,\ldots,N$

3.2.Simpson Yaklaşım Kuralındaki Hata Payı:

$$f(x) = f_{j+1} + \left(x - x_{j+1}\right) f'(x_{j+1}) + \frac{\left(x - x_{j+1}\right)^2}{2!} f''(x_{j+1}) + \ldots$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+2h}} f(x)dx = 2h\left[f_{j+1} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{2!} f''(x_{j+1}) + \frac{1}{5}\frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_{j+1}) + \ldots \right] \quad *$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+2h}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_j + 4 f_{j+1} + f_{j+2} \right)$$

$$= \frac{h}{3}\left[\left(f_{j+1} - hf'(x_{j+1}) + \frac{h^2}{2!} f''(x_{j+1}) - \ldots \right) + 4 f_{j+1} + \left(f_{j+1} + hf'(x_{j+1}) + \frac{h^2}{2!} f''(x_{j+1}) + \ldots \right)\right]$$

$$= 2h\left(f_{j+1} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{2!} f''(x_{j+1}) + \frac{1}{3}\frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_{j+1}) + \ldots \right) \quad **$$

Şimdi şu farka bakalım $\quad * \ - \ ** \quad = E_S$

$$E_s = 2h\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\frac{h^4}{4!} f^{(4)}\left(x_{j+1}\right) + \ldots$$

$$E_S = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}\left(x_{j+1}\right) + \ldots$$

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

(SIMPSON YAKLAŞIM KURALI VE STİELTJES İNTEGRALİ)

4. 1.SIMPSON YAKLAŞIM KURALININ STİELTJES İNTEGRALİNE UYGULANMASI

Verilen aralığı n parçaya bölelim a= $x_0 < x_1 < x_2 < . . . < x_N$ =b

Her bir aralık $\left[x_j, x_{j+1}\right]$, $x_{j+1} = x_j + h$, $j = 0,1,...,N = 2n.$

Taylor Açılımını kullanırsak,

$$f\left(x\right)=f\left(x_{j+1}^{*}\right)+f_{\phi}^{I}\left(x_{j+1}^{*}\right)\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]+f_{\varphi}^{II}(x_{j+1}^{*})\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]^{2}}{2!}+$$

$$+f_{\varphi}^{III}(x_{j+1}^{*})\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]^{3}}{3!}+f_{\varphi}^{(IV)}\left[x_{j+1}^{*}+\theta(x-x_{j+1}^{*})\right]\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]^{4}}{4!}$$

burada $x_{j+1}^{*} = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_{j+2})+\varphi(x_j)}{2}\right) \Rightarrow \quad \varphi(x_{j+1}^{*}) = \frac{\varphi(x_{j+2})+\varphi(x_j)}{2}$

$$\int_{x_j}^{x_j+2h} f(x)d\varphi(x)=\int_{x_j}^{x_j+2h}\left[f(x_{j+1}^{*})+f_{\varphi}^{I}(x_{j+1}^{*})\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]+\frac{f_{\varphi}^{II}(x_{j+1}^{*})}{2}\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]^{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{f_{\varphi}^{III}(x_{j+1}^{*})}{3!}\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]^{3}+f_{\varphi}^{(IV)}\left[x_{j+1}^{*}+\theta(x-x_{j+1}^{*})\right]\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x_{j+1}^{*})\right]^{4}}{4!}\right]d\varphi(x)=$$

$$I_j = \int_{x_j}^{x_j+2h} f(x)d\varphi(x) = f(x^*_{j+1})\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x_j)\right] + \underbrace{f^{\prime}_{\varphi}(x^*_{j+1})\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^2}{2!}\Bigg|_{x_j}^{x_j+2h}}_{=0} +$$

$$+ f^{\prime\prime}_{\varphi}\frac{(x^*_{j+1})}{3!}\left[\varphi(x)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^3\Big|_{x_j}^{x_j+2h} + \underbrace{f^{\prime\prime\prime}_{\varphi}(x^*_{j+1})\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^4}{4!}\Bigg|_{x_j}^{x_j+2h}}_{=0} +$$

$$+\int_{x_j}^{x_j+2h} f^{(iv)}_{\varphi}\left[x^*_{j+1}+\theta(x-x^*_{j+1})\right]\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^4}{4!}d\varphi(x).$$

Sonra

$$I_j = \int_{x_j}^{x_j+2h} f(x)d\varphi(x) = f(x^*_{j+1})\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x_j)\right] + f^{\prime\prime}_{\varphi}\frac{(x^*_{j+1})}{3!}\cdot 2\cdot\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x^*_{j+1})\right]^3 +$$

$$+\int_{x_j}^{x_j+2h} f^{(iv)}_{\varphi}\left[x^*_{j+1}+\theta(x-x^*_{j+1})\right]\frac{\left[\varphi(x)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^4}{4!}d\varphi(x)$$

Taylor Açılımından

$$f(x_j) = f(x^*_{j+1}) + f^{\prime}_{\varphi}(x^*_{j+1})\left[\varphi(x_j)-\varphi(x^*_{j+1})\right] + \frac{f_{\varphi}^{\prime\prime}(x^*_{j+1})}{2!}\left[\varphi(x_j)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^2 +$$

$$+\frac{f_{\varphi}^{\prime\prime\prime}(x^*_{j+1})}{3!}\left[\varphi(x_j)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^3 + \frac{f_{\varphi}^{(iv)}\left(x^*_{j+1}+\theta(x_j-x^*_{j+1})\right)}{4!}\left[\varphi(x_j)-\varphi(x^*_{j+1})\right]^4$$

$$f(x_{j+2}) = f(x^*_{j+1}) + f^{\prime}_{\varphi}(x^*_{j+1})\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x^*_{j+1})\right] + \frac{f_{\varphi}^{\prime\prime}(x^*_{j+1})}{2!}\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x^*_{j+1})\right]^2 +$$

$$+\frac{f_{\varphi}^{\prime\prime\prime}(x^*_{j+1})}{3!}\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x^*_{j+1})\right]^3 + \frac{f_{\varphi}^{(iv)}\left(x^*_{j+1}+\theta(x_{j+2}-x^*_{j+1})\right)}{4!}\left[\varphi(x_{j+2})-\varphi(x^*_{j+1})\right]^4$$

Sonra

$$A_j = \frac{\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)\right]}{6}\left[f(x_j) + 4f(x^*_{j+1}) + f(x_{j+2})\right] =$$

$$= \int\limits_{x_j}^{x_{j+2}} \frac{1}{6}\left[f(x_j) + 4f(x^*_{j+1}) + f(x_{j+2})\right] d\varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_{x_j}^{x_{j+2}} \left\{ \begin{array}{l} f(x^*_{j+1}) + f'_{\varphi}(x^*_{j+1})\left[\varphi(x_j) - \varphi(x^*_{j+1})\right] + \dfrac{f_{\varphi}''(x^*_{j+1})}{2!}\left[\varphi(x_j) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^2 + \\ + \dfrac{f_{\varphi}'''(x^*_{j+1})}{3!}\left[\varphi(x_j) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^3 + \dfrac{f_{\varphi}^{(iv)}\left(x^*_{j+1} + \theta(x_j - x^*_{j+1})\right)}{4!}\left[\varphi(x_j) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^4 + \\ +4f(x^*_{j+1}) + \\ + f(x^*_{j+1}) + f'_{\varphi}(x^*_{j+1})\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x^*_{j+1})\right] + \dfrac{f_{\varphi}''(x^*_{j+1})}{2!}\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^2 + \\ + \dfrac{f_{\varphi}'''(x^*_{j+1})}{3!}\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^3 + \dfrac{f_{\varphi}^{(iv)}\left(x^*_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x^*_{j+1})\right)}{4!}\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^4 \end{array} \right\} d\varphi(x)$$

Buradan

$$A_j = f(x^*_{j+1}) + \frac{f_{\varphi}''(x^*_{j+1})}{3}\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^3 +$$
$$+ \frac{f_{\varphi}^{(iv)}\left(x^*_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x^*_{j+1})\right)}{4!} \cdot 2 \cdot \left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^5 . \qquad ★★$$

Şimdi ★ − ★★ farkına bakalım ,

$$E_s(j) = I_j - A_j = \int\limits_{x_j}^{x_{j+2}} \left\{ \begin{array}{l} f_{\varphi}^{(iv)}\left[x^*_{j+1} + \theta(x - x^*_{j+1})\right] . \dfrac{\left[\varphi(x) - \varphi(x^*_{j+1})\right]^4}{4!} d\varphi(x) - \\ - \dfrac{f_{\varphi}^{(iv)}\left(x^*_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x^*_{j+1})\right)}{4!} \cdot 2 \cdot \left[\dfrac{\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)}{2}\right]^5 \end{array} \right\} d\varphi(x).$$

Şimdi

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \left| f_{\varphi}^{(\iota v)}\left(x\right)\right|$$

Sonra

$$\left|E_s(j)\right| \le \int_{x_j}^{x_{j+2}} \left| f_{\varphi}^{(\iota v)}\left(x_{j+1}^{*} + \theta(x - x_{j+1}^{*})\right)\right| \frac{\left[\varphi(x) - \varphi(x_{j+1}^{*})\right]^4}{4!} d\varphi(x) +$$

$$+\left| f_{\varphi}^{(\iota v)}\left(x_{j+1}^{*} + \theta(x_{j+2} - x_{j+1}^{*})\right)\right| \frac{1}{4!.2^4}\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)\right]^5$$

$$\le M \cdot \frac{\left[\varphi(x) - \varphi(x_{j+1}^{*})\right]^5}{5!}\Bigg|_{x=x_j}^{x=x_{j+2}} + \frac{M}{4!.2^4}\cdot\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)\right]^5 =$$

$$= \frac{M}{4!.2^4}\cdot\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)\right]^5\left(\frac{1}{5}+1\right), \qquad j = 0,1,2,......., N-2$$

Şimdi ise

$$W(\delta) = \sup_{|x-y|\le\delta} \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right|$$

$$I(x) = \sum_{j=0}^{n-1} I_{2j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi(x_{2j+2}) - \varphi(x_{2j})}{6}\left[f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}^{*}) + f(x_{2j+2})\right]$$

$$I = \int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

$$E(n) = I - I_n = \sum_{j=0}^{n-1} E_S(2j), \quad \textit{buradan}$$

$$\left|E(n)\right| \le \sum_{j=0}^{n-1}\left|E_{2j}\right| \le \frac{M}{16.4!}\cdot\frac{6}{5}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sup\left|(\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)\right|\right]\left[\varphi(x_{j+2}) - \varphi(x_j)\right] = \frac{6M}{16\cdot 5!}\left[W(2h)\right]^4 (b-a)$$

SONUÇ

Artan ve sürekli bir fonksiyona göre bir fonksiyonun türevinin tanımı ele alındı.Türev-süreklilik teoremi ispatlandı.

Türevi bulunamayan bir fonksiyonun,başka artan ve sürekli bir fonksiyon($\varphi(x)$) altında türevlenebilir olduğu aktarıldı ve örnek verildi.Bu artan ve sürekli fonksiyonun ($\varphi(x)$) türevinde kullanılan kural ve teoremler ele alındı.Taylor açılımına uygulanabilirliği görüldü.

Artan ve sürekli fonksiyonun ($\varphi(x)$) ters türevi ve Stieltjes integrali incelendi.Bu integralde ve bağlantılı teoremlerde $\varphi(x)$ in uygulanabilir olduğu gözlemlendi.

Simpson kuralının Riemann integralinde görüldü.Ardından Simpson kuralının Stieltjes integralinede uygulanabilir olduğu anlaşıldı.

İleride yapılacak çalışmalarla başka kurallarında Stieltjes integraline uygulanabilir olduğu/olmadığının incelenebileceği kanaatine varıldı.

ÖZET

Birinci bölümde temel olarak artan ve sürekli bir fonksiyona göre bir fonksiyonun türevinin tanımı ve ilgili teoremler ele alındı. Türevlenemeyen bir fonksiyonun,başka artan ve sürekli bir fonksiyon($\varphi(x)$) altında türevlenebilir olduğu aktarıldı ve örnek verildi.Bu artan ve sürekli fonksiyonun ($\varphi(x)$) türevinde kullanılan kural ve teoremler ele alındı.Taylor açılımına uygulanabilirliği görüldü.

Daha sonra, artan ve sürekli fonksiyonun ($\varphi(x)$) ters türevi ve Stieltjes integrali incelendi.Bu integralde ve bağlantılı teoremlerde $\varphi(x)$ in uygulanabilir olduğu gözlemlendi.

Son olarak da, Simpson kuralı Riemann integralinde görüldü.Ardından Simpson kuralının Stieltjes integralinede uygulanabilir olduğu anlaşıldı.

КЫСКАЧА БАЯН

Биринчи бөлүмдө, кадимки туунду алуудан кенээнирек болгон башка бир үзгүлтүксүз өсүүчү функцияга карата туунду алуу менен башталды. Кадимки туундусу жок болгон жерде башка бир үзгүлтүксүз өсүүчү функцияга карата туундусу бар экендиги көрсөтүлдү. Кадимки туунду алуунун касиеттери жана теоремалары башка бир функцияга карата туунду алууда дагы иштеши көрсөтүлдү.

Экинчи бөлүмдө болсо, бул башка бир функцияга карата туунду алуунун тескери операциясы болгон Стильтес интегралы каралды.

Акыркы бөлүмдө, Риман интегралындагы жакындаштырып эсептөө методдорунан Симнсон методу жана анын ката формуласы табылды. Бул методдун Стильтес интегралында да колдонууга болоору далилденди.

KAYNAKLAR:

[1] Asanov, A. (2001). Proizvodnaya Funktsii po Vozrastayushey Funktsii . University Manas, 1(2): 18-45

[2] Bender, E. Deriving the Trapezoidal Rule Error. University of California, Department of Mathematics, San-Diego http://math.ucsd.edu/~ebender/20B/77_Trap.pdf

[3] Conte S. and C. de Boor. (1972). Elementary Numerical Analysis. McGraw-Hill. New York

[4] First Step in Numerical Analysis. Mahidol Physics Education Centre. http://mpec.sc.mahidol.ac.th/numer/STEP31.HTM

[5] Jensen J. and Rowland J., (1975). Methods of Computation. Scott. Foresman. Glenview

[6] Rozema, E. (Feb., 1980). Estimating the Error in the Trapezoidal Rule. The American Mathematical Monthly, 87(2):124-128

[7] Silverman, R.A. (1985). Calculus with Analytic Geometry. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 413-423

KIRGIZİSTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STİELTJES İNTEGRALİNDE SAYISAL YAKLAŞIM METODLARI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Murat SEZER

BİŞKEK 2010