

КЫРГЫЗ-ТҮРК МАНАС УНИВЕРСИТЕТИ

ТАБИГИЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ

МАТЕМАТИКА БӨЛҮМҮ

СТИЛЬТЕСТИН ИНТЕГРАЛЫН

ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЭСЕПТӨӨ МЕТОДУ

(МАГИСТРАТУРА)

Мухаммадмусо АБДУЖАББАРОВ

БИШКЕК 2010

КЫРГЫЗ-ТҮРК МАНАС УНИВЕРСИТЕТИ

ТАБИГИЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ

МАТЕМАТИКА БӨЛҮМҮ

СТИЛЬТЕСТИН ИНТЕГРАЛЫН

ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЭСЕПТӨӨ МЕТОДУ

(МАГИСТРАТУРА)

Мухаммадмусо АБДУЖАББАРОВ

Диссертация Жетекчиси

Проф.Др. Авыт АСАНОВ

БИШКЕК 2010

İntihal Yapılmadığını Belirten İfade

Ben bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallara göre aldığımı ve sunduğumu belirtiyorum. Bu çalışmaya özgün olmadan kullandığım bütün materyal ve bilgilere akademik ve etik kurallar gereğince atıfta bulunduğumu ve hiçbir şekilde intihal yapmadığımı açıkça bildiriyorum.

İSİM, SOYAD:

İMZA:

TARİH:

Плагиат жасалбагандыгы тууралуу билдируу

Мен бул эмгекте алынган бардык маалыматтарды академиялык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум. Тагыраак айтганда бул эмгекте колдонулган бирок мага тишелүү болбогон маалыматтардын бардыгын тиркееде так көрсөттүм жана эч кайы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

АТЫ, ЖӨНҮ:

КОЛУ:

ДАТАСЫ:

KIRGIZİSTAN TÜRKiYE

MANAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Anabilim dalı, Matematik Bilim Dalı'nda 0851Y03002 numaralı
Muhammadmuso ABDUJABBAROV un hazırladığı “Stieltjes integralinin değerini orta
nokta kuralını kullanarak yaklaşık olarak bulma” konulu Yüksek Lisans ile ilgili tez
savunma sınavı, 17 Haziran 2010 günü 10:00 – 11:00 saatleri arasında yapılmış,
sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin
(başarılı/başarısız) olduğuna (oybirliği/oy çokluğu) ile karar verilmiştir.

ЧЕЧИМ

Кыргыз-Түрк Манас университетинин Коомдук Илимдер Институтунун
экзамендик инструкциясынын- жобосуна ылайык, № жыйында
уюшулган комиссия, педагогика бөлүмүнүн
магистранты ... темасында жазган дипломдук проектин анализдеп, .../.../ 2010 ж.
Саат ... дө жактоого кабыл алды.

Магистрант ... минута убакыт ичинде дипломдук проектин жактап,
комиссия деген чечим чыгарды.

КЫСКАЧА МАЗМУНУ

Даярдаган	: Мухаммадмусо Абдужаббаров
Университет	: Кыргыз-Түрк Манас Университети
Институт	: Табигий Илимдер Институту
Багыты	: Математика
Иштин сыпаты	: Магистртура
Беттердин саны	: X+18
Бүтүрүү датасы	: Май 2010
Диссертация жетекчиси	: Проф.Др.Авыт Асанов

Стильтестин интегралын орточекит методу менен жакындаштырып эсептөө

Математикалык эсептерде же математика колдонулган көп жерлерде берилген функциялардын туундуларын алуу же интегралдык эсептөөлөр бар. Бирок бул функциялардын туундуларын алуу же болбосо интегралдарын эсептөө абдан татаал болгон учурлар болот, кээде болсо мүмкүн болбогон учурлар болот. Мындай учурларда башка бир функцияга карата туунду алынганда туундулары бар экендиги көрүлдү. Мындай туунду алуу Стильтес интегралынын тескери операциясы экендиги көрсөтүлгөн, Стильтес интегралынын айрым учуру Риман интегралы болушу, бул интегралдын керектүүлүгүн көрсөтөт. Бирок бул Стильтес интегралын чыгарылышы ар дайым бар экендиги билинсе дагы, муну эсептөө ар дайым мүмкүн болбойт. Ошондуктан интегралды жакындаштырып эсептөө методдору колдонулат. Риман интегралын жакындаштырып эсептөөдө колдонулган орто чекит методун Стильтес интегралына да колдонулушу мүмкүн экендиги көрсөтүлдү. Албетте жакындаштырып эсептөөнүн так чыгарылыштан айырмасы болот, ушул катасын кантип табуу жана кандай шарттар коюш керектиги көрсөтүлдү.

Алгач, биринчи бөлүмдө башка бир өсүүчү үзгүлтүксүз функцияга карата туунду алуунун аныктамасы жана бул туунду алуунун кээ бир теоремалары каралды. Кийинки бөлүмдө, бул туунду алуунун тескери функциясы болгон Стильтестин интегралын аныктамасы берилди. Акыркы үчүнчү бөлүмдө болсо, жакындаштырып эсептөө методдорунан Орто Чекит методунун аныктамасы менен бирге бул методдун бир гана Риман интегралына эмес, Стильтестин интегралына да колдонууга болоору көрсөтүлдү.

Ачкыч сөздөр: Стильтес интегралы, Риман интегралы, жакындаштырып

эсептөө, туунду, интеграл, орто чекит методу.

ÖZ

Yazar : Muhamadmuso Abdujabbarov
Üniversite : Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi
Enstitü: : Fen Bilimleri
Bilim Dalı : Matematik
Tezin Niteliği : Yüksek Lisans Tezi
Sayfa Sayısı : X+18
Mezuniyet Tarihi : Mayıs 2010
Tez Danışmanı : Prof.Dr. Avıt Asanov

Stieltjes integralinin değerini orta nokta kuralını kullanarak yaklaşık olarak bulma

Matematiksel hesapların yada Uygulamalı Matematiğin birçok bölümünde türev alma veya integral hesaplamaları mevcuttur. Ama bunların birçoğunun türevlerinin bulunması veya integral denklemlerinin temel Riemann integral kurallarıyla çözümü zordur. Bu durumda böyle fonksiyonların, türevi başka bir artan ve sürekli bir fonksiyona göre alındığında, türevlenebilir olduğu görülmektedir. Bu başka bir fonksiyona göre türev almanın tersi olarak ifade edilen Stieltjes integrali da Riemann integralinin daha genel hali olması ve birçok integral denkleminin çözümü Stieltjes integraliyle çıkması bu metodun önemini arzediyor. Ama bu Stieltjes integralini her zaman çözümlenebilir olduğu bilinsede, çözümünü bulmak zor hatta bazı durumlarda imkansız olabilir. Bu durumda sayısal yaklaşım metodlarını kullanılması kaçınılmaz oluyor. Bu çalışmada da Riemann integralinin yaklaşık değerini bulmada kullanılan orta nokta metodunun Stieltjes integraline de uygulanabilir olduğu görülmektedir. Sayısal yaklaşım metodu olması itibariyle, doğal olarak ortaya çıkacak hata payının hesaplanması ve koyulacak şartları da kapsamaktadır.

Birinci bölümde, başka bir fonksiyona göre türevin tanımı ve bazı teoremleri ele alındı. Bir sonraki bölümde ise, bu tür türev almanın tersi olan Stieltjes integralinin tanımı yapıldı. Ve son bölümde de, sayısal metodlardan Orta nokta metodunun önce Riemann integralinde daha sonra da Stieltjes integralinde uygulanabilir olduğu görüldü.

Anahtar Sözcükler: türev, integral, Riemann integrali, Stieltjes integrali, sayısal
yaklaşım metodları, orta nokta metodu

ABSTRACT

Prepared by : Muhammadmuso Abdujabbarov
University : Kyrgyz-Turkish Manas University
Institute : Natural Sciences
Department : Mathematics
Thesis Level : Master Thesis
Number of Pages : X+18
Graduate Date : May 2010
Thesis Advisor : Prof.Dr. Avyt Asanov

Approximate Integration of Stieltjes Integral by using the Midpoint Rule

In many parts of Mathematical computations, Scientific computations or in Applied Mathematics it is needed to differentiate a function or integrate a function. However, it is known that many functions are not differentiable and cannot be integrable by using Riemann integrations methods. If some of this kind of functions are differentiated with respect to another function, derivative may exists. In addition, as an antiderivative with respect to function that is Stieltjes integral, some of unintegrable functions can be integrated with respect to function above. Unfortunately, it is again difficult to integrate many functions by using this Stieltjes integral, even though the existence is guaranteed. This leads to use approximation methods. In Riemann integral, there are many approximation methods. One of these methods is the Midpoint Rule. In this paper, it is tried to find whether it is possible to use this Midpoint method in Stieltjes integral or not. Since this is an approximation method, it can be thought immediately about the error bound in this calculation. In this paper, the Formula and needed conditions for the error bound are also obtained.

As a preliminary section, the first section is devoted to derivative with respect to a continuous and increasing function. Here some of the differentiation rules are given. Then, Stieltjes integral is defined as an antiderivative of this differentiation. After these fundamental studies, one of the approximation methods The Midpoint Rule is defined and error bound is obtained. And then, this method is applied to Stieltjes integral.

Keywords: Differentiation, Integral, Stieltjes integral, Riemann integral, approximation methods, error bounds, the Midpoint rule.

АБСТРАКТ

Автор : Мухаммадмусо Абдужаббаров
Университет : Кыргызско-Турецкий Университет Манас
Институт : Естественных Наук
Кафедра : Математика
Качество диссертации : Магистратура
Количество страниц : X+18
Дата выпуска : Май 2010
Руководитель диссертации: Проф.Др.Авыт Асанов

Приближенное вычисление интеграла Стильтеса методом средней точки

Во многих Математических и Научных вычислениях или же в Прикладной Матиматике нужно взять производную или интеграл какой либо функции. Но как известно не все функции могут быть дифференцированы или же интегрированы методом Римана. Если у какой нибуть функции существует производная относительно другой функции, то производная может существовать. В дополнение, если первообразная относительно функции которая равна интегралу Стильтеса, то можно вычислить интеграл некоторых не дифференцируемых функций. Но к сожалению, даже при гарантии существования, крайне тяжело вычислить интеграл методом Стильтеса. Это всё ведёт к методу приближения. В интеграле Римана существует множество методов приближения. И одно из них это метод «Средней Точки». В этой статье, пытается определить возможно ли использование метода «Средней Точки» в вычисление интеграла методом Стильтеса. Так как здесь используется метод приближения то тут нужно ожидать погрешности вычисления. Так же в этой статье вычисляются все формулы и нужные условия для снижения погрешности.

Первая глава посвящена производной относительно непрерывной и возрастающей функции. Здесь даны несколько законов производных и теорема расширения Тейлора. Далее во второй главе, интеграл Стильтеса определяется как первообразная относительно функции. После фундаментальных определений в третьей главе определяется и закон приближения Средней точки, и вычитывается погрешность для этого метода. Далее даётся приложения метода вычисления с использованием интеграла Стильтеса.

Ключевые слова: интеграл Стильтеса, интеграл Римана, Приближенное
вычисление, метод Средней Точки, производная, интеграл

АЛГАЧ СӨЗ:

Бул иште $\int_a^b f(x)dx$ интегралын жакындаштырып эсептөө методдоруна Орто

чекит методун жана анын ката формуласын талкуулайбыз. Орто чекит методун колдонуу үчүн интегралы алынган функция экинчи туундуга ээ болушу керек.

Андан кийин бул методду колдонуп $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ Стильтестин интегралын

каалаган тактыкта эсептейбиз. Бул интегралдагы $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында үзгүлтүксүз жана $\varphi(x)$ функциясы (a,b) интервалында үзгүлтүксүз жана өсүүчү болушу зарыл.

Бул иште мага жардамын жана ой-пикирлерин аябаган жетекчим Проф.Др.Авыт Асанов агайга чоң ыраазычылыгым билдиремин.

Бишкек 2010

Мухаммадмусо Абдужаббаров

МАЗМУНУ:

	Бети
ДИССЕРТАЦИЯ ЧЕЧИМИ	ii
КЫСКАЧА МАЗМУНУ	iv
ÖZ	v
ABSTRACT	vi
АБСТРАКТ	vii
АЛГАЧ СӨЗ	viii
МАЗМУНУ	ix
СИМВОЛДОР	x
КИРИШ СӨЗ	1

БИРИНЧИ БӨЛҮМ

1. ТУУНДУ АЛУУНУН АНЫКТАМАСЫ	2
------------------------------------	---

ЭКИНЧИ БӨЛҮМ

1. СТИЛЬТЕСТИН ИНТЕГРАЛЫ	6
--------------------------------	---

ҮЧҮНЧҮ БӨЛҮМ

1. ОРТО ЧЕКИТ МЕТОДУ	9
2. ОРТО ЧЕКИТ МЕТОДУНДАГЫ КАТА ФОРМУЛАСЫ	10
3. СТИЛЬТЕС ИНТЕГРАЛЫНДА ОРТО ЧЕКИТ МЕТОДУ	13
ЖЫЙЫНТЫК	16
КЫСКАЧА БАЯН	17
АДАБИЯТТАР	18

СИМВОЛДОР

$[a, b]$	жабык интервал
(a, b)	ачык интервал
$\in$	элементи
f'_φ	$\varphi(x)$ функциясына карата туунду
$\rightarrow$	унтулганда
$\int f(x) d\varphi(x)$	$\varphi(x)$ функциясына карата интегралы
$\max_{x \in [a, b]}$	x $[a, b]$ интервалында болгондогу эң чоң маани
$\sup_{ x-y \leq \delta}$	шартты канааттандырган эң чоң маани

КИРИШ СӨЗ

Интеграл алуу азыркы учурда математиканын эң көп көңүл бурулган бөлүмдөрү болуп саналат. Ал, математиканын абдан көп тармактарында, физикада, инженерия тармактарында жана башка математика колдонулган жерлерде колдонулат. Риман интегралынын кенээниреги болгон Стильтес интегралы дагы математиканын мүмкүнчүлүк теория, барабарсыздыктар жана башка багыттарында колдонулат. Бул интегралга баштабастан мурда, туунду жөнүндө кичине сөз айтуу маанилүү болсо керек. Бирок бул туунду алуу x ке карата эмес, башка бир өсүүчү үзгүлтүксүз функцияга карата алынат. Бул бизге кээ бир x ке карата туундусу болбогон функцияларды туундусун алууга жардам берет. Мындай туундунун тескери функциясы болгон Стильтес интегралы дагы, Риман интегралы болбогон функциялардын интегралын табууда абдан пайдалуу. Бирок, Стильтес интегралында дагы интегралы алыналбаган функциялар бар экендиги жакындаштыруу методдорунун маанисин көрсөтөт. Бул иште, ушул жакындаштыруу методдорунан Орто Чекит методун Риман жана Стильтес интегралдарында колдонулушу жана ката функциялары каралат.

БИРИНЧИ БӨЛҮМ

1. ТУУНДУ АЛУУНУН АНЫКТАМАСЫ

Аныктама 1: $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары (a, b) интервалында аныкталган жана $\varphi(x)$ функциясы (a, b) интервалында үзгүлтүксүз өсүүчү болсун. Ар кандай $x \in (a, b)$ жана $\Delta x \neq 0$ үчүн

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясына карата туундусу

$$f'_{\varphi}(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} \quad \text{болуп аныкталат.}$$

Теорема 1: Эгер $f(x)$ функциясынын $x_0 \in (a, b)$ точкасында $\varphi(x)$ ке карата туундусу болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 точкасында үзгүлтүксүз болот.

Далилдөө:

Эгер $f(x)$ функциясынын $x_0 \in (a, b)$ точкасында $\varphi(x)$ ке карата туундусу болсо, анда 1.чи аныктама боюнча

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta \varphi(x_0)} = \frac{df}{d\varphi}(x_0) = f'_{\varphi}(x_0)$$

Анда, $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta \varphi(x_0)} = f'_{\varphi}(x_0) + \alpha(\Delta x)$ бул жерде $\alpha(\Delta x)$ тин мааниси абдан кичине

болот $\Delta x \rightarrow 0$ го умтулганда

$$\Delta f(x_0) = f'_{\varphi}(x_0) \Delta \varphi(x_0) + \alpha(\Delta x) \Delta \varphi(x_0)$$

Анда $\Delta x \rightarrow 0$ го умтулганда

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0) \rightarrow 0$$

Бул дегени, $f(x)$ функциясы x_0 точкасында үзгүлтүксүз болот. $\square$

Мисал:

$f(x) = |x|$ функциясы $x = 0$ точкасында туундуга ээ эмес экендиги белгилүү.

Бирок, $f(x) = |x|$ функциясы $\varphi(x)$ үзгүлтүксүз өсүүчү функцияга карата

$(-\infty, \infty)$ интервалында туундуга ээ экендигин көрсөтөлү, бул жерде

$$\varphi(x) = \begin{cases} -|x|^{\frac{1}{3}}, & x < 0 \\ |x|^{\frac{1}{3}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Чыгарылыш:

Биринчи, $x < 0$ болсун, анда

$$\begin{aligned} f'_\varphi(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3}{-\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(|x + \Delta x|^{\frac{2}{3}} + |x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} \cdot |x|^{\frac{1}{3}} + |x|^{\frac{2}{3}}\right)}{-\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(|x + \Delta x|^{\frac{2}{3}} + |x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} \cdot |x|^{\frac{1}{3}} + |x|^{\frac{2}{3}}\right) = -3 \cdot |x|^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Ал эми, $x > 0$ болсун

$$\begin{aligned}
f'_{\varphi}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(|x + \Delta x|^{\frac{2}{3}} + |x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} \cdot |x|^{\frac{1}{3}} + |x|^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(|x + \Delta x|^{\frac{2}{3}} + |x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} \cdot |x|^{\frac{1}{3}} + |x|^{\frac{2}{3}}\right) = 3 \cdot |x|^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Эми болсо, $x = 0$ жана $\Delta x > 0$ болсун

$$f'_{\varphi}(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\varphi(\Delta x) - \varphi(0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{|\Delta x|^{\frac{1}{3}}} = 0$$

Эми $\Delta x < 0$ болсун

$$f'_{\varphi}(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\varphi(\Delta x) - \varphi(0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{-|\Delta x|^{\frac{1}{3}}} = 0$$

Демек, $f'_{\varphi}(0) = 0$

Анда, $f(x) = |x|$ функциясы $\varphi(x)$ үзгүлтүксүз өсүүчү функцияга карата

$(-\infty, \infty)$ интервалында туундуга ээ жана

$$f'_{\varphi}(x) = \begin{cases} -3 \cdot |x|^{\frac{2}{3}}, & x < 0 \\ 3 \cdot |x|^{\frac{2}{3}}, & x > 0 \end{cases}$$

Кээ бир туунду алуу формулалары:

1) $(C)'_{\varphi} = 0$, бул жерде C турактуу сан.

2) $(u+v)'_{\varphi} = u'_{\varphi} + v'_{\varphi}$

3) $(u \cdot v)'_{\varphi} = u'_{\varphi} \cdot v + u \cdot v'_{\varphi}$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'_{\varphi} = \frac{u'_{\varphi} \cdot v - u \cdot v'_{\varphi}}{v^2}$

5) $u(x)$ функциясы $\varphi(x)$ ке карата $x = x_0$ точкасында туундуга ээ болсун жана

$$u(x_0) = u_0, \quad u'_{\varphi}(x_0) = \alpha \text{ болсун,}$$

$$f(u) \text{ функциясы } u = u_0 \text{ точкасында туундуга ээ болсун жана } f'(u_0) = \beta.$$

$$\text{Анда, } v(x) = f(u(x)) \text{ функциясы } \varphi(x) \text{ ке карата } x = x_0 \text{ точкасында}$$

$$\text{туундуга ээ болот, бул жерде}$$

$$v'_{\varphi}(x) = f'(u_0) \cdot u'_{\varphi}(x_0) = \beta \cdot \alpha$$

Тайлор формуласы:

$$f(x) \text{ функциясы } (n-1) \text{ жолу } \varphi(x) \text{ ке карата } x = x_0 \text{ точкасында туундуга ээ болсун}$$

$$\text{жана } f_{\varphi}^{(n)}(x_0) \text{ дагы анык болсун.}$$

$$\text{Анда}$$

$$q(x) = f_n(x_0, x) = f(x_0) + \frac{f'_{\varphi}(x_0)}{1!} \Delta\varphi + \frac{f''_{\varphi}(x_0)}{2!} (\Delta\varphi)^2 + \dots + \frac{f_{\varphi}^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta\varphi)^n$$

$$\text{Бул жерде } \Delta\varphi = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

ЭКИНЧИ БӨЛҮМ

1. СТИЛЬТЕСТИН ИНТЕГРАЛЫ

Теорема 2: $f(x)$ функциясы $[a, b]$ интервалында үзгүлтүксүз болсун жана

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot d\varphi(t), \quad x \in [a, b]$$

$$\text{Анда } F'_\varphi(x) = \left(\int_a^x f(t) \cdot d\varphi(t) \right)'_\varphi = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\text{Бул жерде } F'_\varphi(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(a + \Delta x) - F(a)}{\varphi(a + \Delta x) - \varphi(a)} \text{ жана } F'_\varphi(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{F(b + \Delta x) - F(b)}{\varphi(b + \Delta x) - \varphi(b)}$$

Далилдөө: Туунду алуунун аныктамасы боюнча

$$F'_\varphi(x) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x) \int_x^{x+\Delta x} d\varphi - \int_x^{x+\Delta x} (f(x) - f(t)) d\varphi \right)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} = f(x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \psi(x, \Delta x)$$

$$\text{бул жерде } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \psi(x, \Delta x) = \frac{\left(\int_x^{x+\Delta x} (f(x) - f(t)) d\varphi \right)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}$$

$\varphi(x)$ функциясы $[a, b]$ интервалында өсүүчү болгондуктан

$$|\psi(x, \Delta x)| \leq \frac{\omega_f(\Delta x) \left(\int_x^{x+\Delta x} d\varphi \right)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} = \omega_f(\Delta x)$$

бул жерде $\omega_f(\delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(x) - f(t)|$

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$ экендиги ачык, анда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\psi(x, \Delta x)| \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \omega_f(|\Delta x|) = 0$

Демек, $F'_\varphi(x) = f(x)$

□

Теорема 3: (Ньютон-Лейбнитз)

$f'_\varphi(x) = f(x)$ функциясы $[a, b]$ интервалында үзгүлтүксүз болсун,

Анда $\int_a^b f'_\varphi(x) \cdot d\varphi(x) = f(b) - f(a)$

Proof: Стилтьес интегралынын аныктамасы боюнча, өйдөдөгү интеграл төмөндөгү сумма болот

$$S_n = \sum_{i=1}^n f'_\varphi(\xi_i) [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

Бул жерде $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ жана $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$

Лагранж теоремасы боюнча,

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'_\varphi(c_i) [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$ бул жерде $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$

Эгер S_n суммасында c_i менен ξ_i дин ордун алмаштырсак ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

□

Жыйынтык: $f'_\varphi(x)$ функциясы $[a, b]$ интервалында үзгүлтүксүз болсун

Анда
$$\int_a^x f'_\varphi(s) \cdot d\varphi(s) = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

Теорема 4:

$f'_\varphi(x)$ жана $g'_\varphi(x)$ функциялары $[a, b]$ интервалында үзгүлтүксүз болсун

$$\int_a^b f(x) \cdot g'_\varphi(x) \cdot d\varphi(x) = [f(x) \cdot g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'_\varphi(x) \cdot d\varphi(x)$$

Далилдөө: Төмөндөгүнү Стильтес интегралы боюнча интеграл алсак

$$[f(x) \cdot g(x)]'_\varphi = f'_\varphi(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'_\varphi(x) \quad \square$$

ҮЧҮНЧҮ БӨЛҮМ

1. ОРТО ЧЕКИТ МЕТОДУ

$\int_a^b f(x)dx$ интегралын Орто Чекит жакындаштыруу методу менен эсептейбиз.

$[a, b]$ интервалын $N=2n$ ге тең бөлөлү, анда ар бир

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \text{ болот жана ар бир бөлүк } h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

Анда $A = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) \cdot (x_{2i} - x_{2i-2})$ формуласы $f(x)$ менен x -огунун

арасындагы региондун аянты болот.

$$x_{2i} - x_{2i-2} = 2h = \frac{b-a}{n} \text{ болгондугунан жана } \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \text{ точкасы}$$

$[x_{2i-2}, x_{2i}]$ интервалынын орто чекити болгондугунан,

$$A = 2h \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_{2i-1}$$

$$\text{Демек, } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})$$

2. ОРТО ЧЕКИТ МЕТОДУНДАГЫ КАТА ФОРМУЛАСЫ

Өйдөдөгү формула боюнча, ар бир бөлүктүн аянты

$$A_i = f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) \cdot (x_{2i} - x_{2i-2}) = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) dx$$

Эми болсо интегралы $I_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx$ болсун.

Тайлор формуласын колдонуп төмөндөгүдөй жазсак болот

$$\begin{aligned} f(x) = & f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) + \\ & + f''\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} + \theta\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right)\right) \cdot \frac{\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

Эми, интеграл менен аянттын айырмасы бизге ката формуласын берет

$$\begin{aligned} |E_i| = |I_i - A_i| = & \left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left[f(x) - f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) \right] dx \right| = \\ = & \left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left\{ \left[f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + f''\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} + \theta\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right)\right) \cdot \frac{\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right)^2}{2} \right] - f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) \right\} dx \right| \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left| f' \left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right) \cdot \left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right)^2 \right|_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}}_{=0} + \left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f'' \left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} + \theta \left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right) \right) \cdot \frac{\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right)^2}{2} dx \right|.$$

Бул жерде $\max_{x \in [a, b]} |f''(x)| = M$ болсун, анда

$$\begin{aligned} |E_i| &\leq \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left| f'' \left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} + \theta \left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right) \right) \right| \cdot \frac{\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right)^2}{2} dx \\ &\leq M \cdot \frac{\left(x - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right)^3}{6} \Bigg|_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} = \frac{M}{6} \left[\left(x_{2i} - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right)^3 - \left(x_{2i-2} - \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \right)^3 \right] \\ &= \frac{M}{6} \cdot 2 \cdot \frac{(x_{2i} - x_{2i-2})^3}{8} = \frac{M}{24} \cdot (2h)^3 = \frac{M}{24} \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \end{aligned}$$

Эми болсо, бөлчөктөрдүн суммасын жазсак

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{жана} \quad A = \sum_{i=1}^n A_i$$

анда, Орто Чекит методун ката формуласы E_M

$$\begin{aligned} |E_M| &= |I - A| = \left| \sum_{i=1}^n (I_i - A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |I_i - A_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{M}{24} \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 = \\ &= \frac{M}{24} \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \cdot n = \frac{M}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} \end{aligned}$$

Демек, Орто Чекиг методу боюнча

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + E_M$$

$$\text{бул жерде } E_M \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}M \quad (*)$$

3. СТИЛЬТЕС ИНТЕГРАЛЫНДА ОРТО ЧЕКИТ МЕТОДУ

$[a, b]$ интервалын $N=2n$ ге тең бөлөлү, анда ар бир

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \text{ болот жана ар бир бөлүк } h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

$$\text{жана } x_{2i+1}^* = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_{2i}) + \varphi(x_{2i-2})}{2}\right) \Rightarrow \varphi(x_{2i+1}^*) = \frac{\varphi(x_{2i}) + \varphi(x_{2i-2})}{2}$$

Анда, ар бир бөлчөктү карасак

$$A_i = f(x_{2i+1}^*) \cdot [\varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i-2})] = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x_{2i+1}^*) d\varphi(x)$$

$$I_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) d\varphi(x)$$

Тайлор формуласын колдонуп төмөндөгүдөй жазсак болот

$$f(x) = f(x_{2i+1}^*) + f'_\varphi(x_{2i+1}^*) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*)) + \\ + \frac{f''_\varphi(x_{2i+1}^* + \theta(x - x_{2i+1}^*))}{2} \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2.$$

Эми, $I_i - A_i$ айырмасы бизге ката формуласын берет

$$I_i - A_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} [f(x) - f(x_{2i+1}^*)] d\varphi(x) \\ = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left\{ \left[f(x_{2i+1}^*) + f'_\varphi(x_{2i+1}^*) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f''_\varphi(x_{2i+1}^* + \theta(x - x_{2i+1}^*))}{2} \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2 \right] - f(x_{2i+1}^*) \right\} d\varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
&= f'_\varphi(x_{2i+1}^*) \cdot \left. \frac{(\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2}{2} \right|_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} + \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \frac{f''_\varphi(x_{2i+1}^* + \theta(x - x_{2i+1}^*))}{2} \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2 d\varphi(x) \\
&= f'_\varphi(x_{2i+1}^*) \cdot \underbrace{\left[(\varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2 - (\varphi(x_{2i-2}) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2 \right]}_{=0} + \\
&\quad + \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \frac{f''_\varphi(x_{2i+1}^* + \theta(x - x_{2i+1}^*))}{2} \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2 d\varphi(x) .
\end{aligned}$$

Эми $M = \max_{x \in [a, b]} |f''_\varphi(x)|$ болсун, анда

$$\begin{aligned}
|I_i - A_i| &\leq \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left| \frac{f''_\varphi(x_{2i+1}^* + \theta(x - x_{2i+1}^*))}{2} \right| \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^2 d\varphi(x) \\
&\leq \frac{M}{2} \cdot \left. \frac{(\varphi(x) - \varphi(x_{2i+1}^*))^3}{3} \right|_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \\
&= \frac{M}{6} \cdot \left[(\varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i+1}^*))^3 - (\varphi(x_{2i-2}) - \varphi(x_{2i+1}^*))^3 \right] \\
&= \frac{M}{6} \cdot 2 \cdot \left[\varphi(x_{2i}) - \frac{\varphi(x_{2i}) + \varphi(x_{2i-2})}{2} \right]^3 \\
&= \frac{M}{24} [\varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i-2})]^3 .
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ ге чейин суммаласак

$$\begin{aligned}
 E_M &\leq \sum_{i=1}^n |I_i - A_i| \\
 &\leq \frac{M}{24} \cdot \sum_{i=1}^n \left| [\varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i-2})]^3 \right| \\
 &\leq \frac{M}{24} \cdot \sum_{i=1}^n \sup \left| \varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i-2}) \right|^2 \cdot \left| \varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i-2}) \right|.
 \end{aligned}$$

$\sup_{|x-y| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| = \gamma(\delta)$ болсун жана $|x_{2i} - x_{2i-2}| \leq 2h$ болгондугунан

$$E_M \leq \frac{M}{24} \cdot [\gamma(2h)]^2 \cdot \sum_{i=1}^n |\varphi(x_{2i}) - \varphi(x_{2i-2})|$$

$$E_M \leq \frac{M}{24} \cdot [\gamma(2h)]^2 [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

ЖЫЙЫНТЫК

Жыйынтыктай турган болсок, Риман интегралында колдонулган жакындаштырып эсептөө методдорунан Орто Чекит методун ката формуласы чыгарылды. Бул методду колдонуп каалаган тактыкта Стильтес интегралында дагы жакындаштырып эсептөө мүмкүн экендиги көрүлдү.

КЫСКАЧА БАЯН

Кадимки туунду алуудан кенеенрек болгон башка бир үзгүлтүксүз өсүүчү функцияга карата туунду алуу менен башталды. Кадимки туундусу жок болгон жерде башка бир үзгүлтүксүз өсүүчү функцияга карата туундусу бар экендиги көрсөтүлдү жана бир мисал берилди. Кадимки туунду алуунун касиеттери жана теоремалары башка бир функцияга карата туунду алууда дагы иштеши көрсөтүлдү. Бул башка бир функцияга карата туунду алуунун тескери операциясы болгон Стильтес интегралы каралды. Риман интегралындагы жакындаштырып эсептөө методдоруна орто чекит методу жана анын ката формуласы табылды. Бул методдун Стильтес интегралында да колдонууга болоору далилденди.

АДАБИЯТТАР:

- [1] Асанов, А. (2001). Производная функции по возрастающей функции. Кыргызско-Турецкий Университет Манас, 1(2): 18-45
- [2] Bender, E. Deriving the Trapezoidal Rule Error. University of California, Department of Mathematics, San-Diego
http://math.ucsd.edu/~ebender/20B/77_Trap.pdf
- [3] Conte S. and C. de Boor. (1972). Elementary Numerical Analysis. McGraw-Hill. New York
- [4] First Step in Numerical Analysis. Mahidol Physics Education Centre.
<http://mpec.sc.mahidol.ac.th/numer/STEP31.HTM>
- [5] Jensen J. and Rowland J., (1975). Methods of Computation. Scott. Foresman. Glenview
- [6] Rozema, E. (Feb., 1980). Estimating the Error in the Trapezoidal Rule. The American Mathematical Monthly, 87(2):124-128
- [7] Silverman, R.A. (1985). Calculus with Analytic Geometry. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 413-423

КЫРГЫЗ-ТҮРК МАНАС УНИВЕРСИТЕТИ

ТАБИГИЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ

МАТЕМАТИКА БӨЛҮМҮ

СТИЛЬТЕСТИН ИНТЕГРАЛЫН

ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЭСЕПТӨӨ МЕТОДУ

(МАГИСТРАТУРА)

Мухаммадмусо АБДУЖАББАРОВ

БИШКЕК 2010